第二十二屆IMC國際數學競賽台灣區複賽
22nd International Mathematics Contest (Taiwan)

高中一年級試卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：______________ 准考證號碼：______________ 試題總分：_______________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，**並減少塗改**，請保持答案清楚!
◎計算題需要在試題空白處**列出運算過程**，只寫答案沒有運算過程不計算成績!

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	C	D	A	B	B	A
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$\frac{2029}{2}$	$k<-3$	960	$-28<k<22$	2592	$2x-3y=17$	$n=15$	(6, 9)、(6, -9) (3 分/5 分)

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. If (1!+2!+3!+..+100!) (1!+2!+3!+..+100!) is divided by 28, then the remainder is _______.
(A)0 (B)1 (C)25 (D)27

<解析>

$28=2^2\times7$，考慮 4 的倍數與 7 的倍數

①4 的倍數 1!÷4=0…1；2!÷4=0…2；3!÷4=1…2；4!÷4=6…0

∴(1+2+2)÷4=1…1，$(1!+2!+3!+..+100!)^2\div4$ 的餘數為 $1^2=1\div4=0....1$

②7 的倍數 1!÷7=0…1；2!÷7=0…2；3!÷7=0…6；4!÷7=3…3；5!÷7=17…1；6!÷7=102…6

∴(1+2+6+3+1+6)÷7=2…5，$(1!+2!+3!+..+100!)^2\div7$ 的餘數為 $5^2\div7=3....4$

4 的同餘類為 1、5、9、13、17、21、25，則取 25÷4=7...4，餘數為 25，選 C。

2. $f(x)=a^x$，$f(2x)=5$，則 $\frac{f(3x)+f(-3x)}{f(x)+f(-x)}=$_______。(A) $\frac{13}{5}$ (B) $\frac{17}{5}$ (C) $\frac{19}{5}$ (D) $\frac{21}{5}$

<解析>

$\frac{f(3x)+f(-3x)}{f(x)+f(-x)}=\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}=a^{2x}-1+a^{-2x}=5-1+\frac{1}{5}=\frac{21}{5}$，選 D。

3. 從數字集合{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9}中任意選出三個不重複的數字，組成一個三位數，並滿足**大於 234 的三位偶數**共有多少個? (A)64 (B)70 (C)75 (D)80

<解析>

①(百位數為 3、5、9)x(個位數為 4、6、8)x(十位數的選擇)➔3x3x5=45

②(百位數為 4、6、8)x(個位數剩 2 個偶數可選)x(十位數的選擇)➔3x2x5=30

共有 45+30=75 個，選 C。

4. 已知實數 x, y 滿足: $(7.2)^x=(0.8)^y=3$，求 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=$________。(A)-3 (B)3 (C)-2 (D)2

<解析>

$(7.2)^x=3 \rightarrow 7.2=3^{\frac{1}{x}}$......①

$(0.8)^y=3 \rightarrow 0.8=3^{\frac{1}{y}}$......②

①÷②得 $\frac{7.2}{0.8}=\frac{3^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{y}}} \Rightarrow 9=3^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$，$3^2=3^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$

$\therefore \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2$，選 D

5. 設二次函數 $f(x)=x^2-4x+7$，其定義域為 $-1\le x\le a$。若函數值 $y=f(x)$ 的**最大值為 12，最小值為 3**，則實數 a 的可能範圍可表示為 $m\le a\le n$，求有序數對 $(m, n)=$________。(A) (2, 5) (B) (3, 6) (C) (4, 7) (D) (5, 8)

<解析>

① $y=f(x)=(x-2)^2+3$ 最小值 3 $\rightarrow$ $x=2$ $\therefore a\ge 2$

② 若 $f(x)=12 \Rightarrow x^2-4x+7=12$，$x^2-4x-5=0$，$(x-5)(x+1)=0$，$x=5$ 或 $x=-1$

③ a 的可能範圍 $m\le a\le n$ $\rightarrow a=5$，即 $2\le a\le 5$，$(m, n)=(2, 5)$，選 A。

6. For the equation $(x-\boldsymbol{a})(x-8)-1=0$, if it has **two integer solutions**, find the value of $\boldsymbol{a}$.
(A)6 (B)8 (C)-6 (D)-8

<解析>

$(x-a)(x-8)-1=0 \rightarrow (x-a)(x-8)=1=1\times1=(-1)\times(-1)$

①當 $x-a=1$、$x-8=1$，得 $x=9$，$a=8$

②當 $x-a=-1$、$x-8=-1$，得 $x=7$，$a=8$

$\therefore a=8$，選 B。

7. 已知一個等比數列，首項為正數，公比為正數，其前四項和為 600，前兩項的積為 675，求前兩項之和。 (A)56 (B)60 (C)64 (D)68

<解析>

設首項=a，公比=r

$a+ar+ar^2+ar^3=600 \rightarrow a(1+r+r^2+r^3)=600$

且 $a\times ar=675$，$a^2r=675$，$675=5^2\cdot3^3$

①$a=5$，$r=25\rightarrow r^3>600$ (不合)

②$a=3$，$r=75\rightarrow r^3>600$ (不合)

③$a=15$，$r=3$，$15\times(1+3+9+27)=600$ (合理)

故前兩項之和=$15\times(1+3)=60$，選 B。

8. Compute the exact of $\cos 30°\cdot\cos 45°\cdot\cos 60°$. (A) $\frac{\sqrt{6}}{8}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

<解析>

$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$、$\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$、$\cos 60°=\frac{1}{2}$

$\therefore \cos 30°\cdot\cos 45°\cdot\cos 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{8}$，選 A。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. Let the sequence $\{a_n\}$ be defined by, $a_1=2$ and $a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$ for $n\geq 1$. Find the sum of the first 2026 terms of the sequence: $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2026}=$________.

<解析>

$a_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$a_3=1-\frac{1}{a_2}=-1$，$a_4=1-\frac{1}{a_3}=2=a_1$，得知$a_5=a_2$、$a_6=a_3$

故$\{a_n\}$為週期數列: 2、$\frac{1}{2}$、-1、2、$\frac{1}{2}$、-1、……

$\therefore a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2026}=\left(2+\frac{1}{2}-1\right)\times 675+2=\frac{2025}{2}+2=\frac{2029}{2}$

2. 已知二次函數 $f(x)=-2x^2+8x+(k-5)$，若對任何實數 x，都有 $f(x)<0$，求實數 k 的範圍為________.

<解析>

$f(x)=-2x^2+8x+(k-5)<0$ 恆成立

$\rightarrow a=-2<0$ 且 $D=8^2-4\times(-2)\times(k-5)<0$

$\therefore 64+8(k-5)<0 \Rightarrow k-5<-8$，$k<-3$

3. 七名學生甲、乙、丙、丁、戊、己、庚排成一列。已知甲與乙必須相鄰，而丙與丁不得相鄰。問共有________種不同的排列方式。

<解析>

①甲、乙為一組與戊、己、庚任意排列，有 2x4!=48 種

②甲乙、戊、己、庚 產生 5 個間隔，丙先選，丁後選，兩人不相鄰，有 5x4=20 種

共有 48x20=960 種

4. 設圓 C: $x^2+y^2-2x-24=0$與直線 L: $3x+4y+k=0$ 相交於相異兩點，則實數 k 的範圍為________。

<解析>

$x^2+y^2-2x-24=0 \rightarrow (x-1)^2+y^2=25$，即圓心(1, 0)，半徑 r=5

圓與直線相交於相異兩點

圓心到直線 L 的距離$=\frac{|3\times 1+4\times 0+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}<5 \Rightarrow |k+3|<25$，$-25<k+3<25$，$-28<k<22$

5. Let $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ be positive real numbers satisfying $\boldsymbol{a+2b=144}$. Find the maximum value of $\boldsymbol{ab}$.

<解析>

$\frac{a+2b}{2}\geq\sqrt{a\times 2b}$，$\frac{144}{2}\geq\sqrt{2ab}$，$72\geq\sqrt{2ab}$，$5184\geq 2ab$，$2592\geq ab$

$\therefore$最大值為 2592

6. 設點 $A(3, 5)$對直線 L 的投影點為$A_0(7, -1)$，求 L 的直線方程式為_______。(寫成 $\boldsymbol{ax+by=c}$ 的形式，其中 $\boldsymbol{a}$ 為正整數且$|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$互質)

<解析>

$\overline{A_0A}$ 的斜率為 $\frac{-1-5}{7-3}=\frac{-6}{4}$，則直線 L 的斜率為$m\times\frac{-6}{4}=-1$，$m=\frac{4}{6}$

利用點斜式，則 L: $y=\frac{4}{6}(x-7)-1$，$6y=4x-28-6$，$4x-6y-34=0$，$2x-3y=17$

7. 已知一等比級數為 $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots$，若其前 $\boldsymbol{n}$ 項和大於 2000，求 $\boldsymbol{n}$ 至少為_______。

<解析>

前 n 項和$=\frac{\frac{1}{16}(2^n-1)}{2-1}=\frac{2^n}{16}-\frac{1}{16}>2000$，$2^{n-4}>2000\frac{1}{16}$，當 $n=14$，$2^{10}=1024<2000\frac{1}{16}$ (不合)

故 $n=15$，$2^{11}=2048>2000\frac{1}{16}$，取 $n=15$。

8. 已知圓上有三個點 $A(3, 0)$、$B(9, 0)$和 $C(x, y)$，圓的半徑為 5。要使得三角形 ABC 面積最大，求 C 點坐標為_______。

<解析>

令圓心為 O，取 M 為 A、B 中點，則$\overline{AM}=\frac{(9-3)}{2}=3$，且圓的半徑=5

得$\overline{MO}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，故圓心 $O(3+3, 0+4)=(6, 4)$或 $O(3+3, 0-4)=(6, -4)$

要使△ABC 面積最大，以$\overline{AB}$為底時，C 點恰位於$\overline{AB}$之中垂線上→高最長

故 C(6, 4+5)=(6, 9)或 C(6, -4-5)=(6, -9) (3 分/5 分)

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 設多項式$f(x)$為實係數多項式，且滿足$f(x)$除以x^2-6x+9的餘式為 $2x+1$；$f(x)$除以 $x+3$ 的餘式為 31。

(1) $f(3)$之值。 (4 分)

(2)求 $f(x)$除以$(x-3)^2(x+3)$的餘式。(6 分)

<解析>

(1) $f(x)=(x+3)(x^2-6x+9)p(x)+a(x^2-6x+9)+2x+1$

$\rightarrow f(x)=(x+3)(x-3)^2p(x)+a(x-3)^2+2x+1$

$\therefore f(3)=2\text{x}3+1=7$

(2) 設$f(x)=(x+3)(x-3)^2q(x)+a(x-3)^2+2x+1$

① $f(x)$除以x^2-6x+9的餘式 $2x+1=2(x-3)+7$，則餘式$=a(x-3)^2+2(x-3)+7$

② $f(-3)=a(-3-3)^2+2(-3-3)+7=31$，$36a-12+7=31$，$36a=36$，$a=1$

得餘式$=(x-3)^2+2x+1=x^2-4x+10$ (送分)

2. 設 x , y 為整數，滿足聯立方程式 $\begin{cases} xy+x+y+19=0 \\ x^2-y^2=3x-51 \end{cases}$，求所有整數解 (x, y)。

<解析>

$x^2-y^2=3x-51 \to x^2 3x-51-y^2=0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4(51-y^2)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{9-204+4y^2)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{4y^2-195}}{2}\in Z$

$\therefore 4y^2-195$ 是平方數且為奇數

令 $4y^2-195=k^2$，$4y^2-k^2=195$，$(2y+k)(2y-k)=15\times13=(-15)(-13)$

① $\begin{cases} 2y+k=15 \\ 2y-k=13 \end{cases}$ ➔ $y=7$，$k=1$，$x=\frac{3\pm1}{2}=2$ 或 1

(2, 7)、(1,7)代入 $xy+x+y+19=0 \to$ 不合

② $\begin{cases} 2y+k=-15 \\ 2y-k=-13 \end{cases}$ ➔ $y=-7$，$k=-1$，$x=\frac{3\pm1}{2}=2$ 或 1

將(2, -7)代入 $xy+x+y+19=0 \to -14+2-7+19=0$ (合理)

將(1, -7)代入 $xy+x+y+19=0 \to -7+1-7+19\neq0$ (不合)

故整數解 $(x, y)=(2, -7)$