

第二十二屆  國際數學競賽台灣區複賽
22nd International Mathematics Contest (Taiwan)

高
中
一
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：_____ 准考證號碼：_____ 試題總分：_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，並減少塗改，請保持答案清楚!								
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績!								
選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	C	D	A	B	B	A
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$\frac{2029}{2}$	$k < -3$	960	$-28 < k < 22$	2592	$2x-3y=17$	$n=15$	$(6, 9) \cdot (6, -9)$ (3分/5分)

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. If $(1!+2!+3!+\dots+100!)$ is divided by 28, then the remainder is _____.
(A)0 (B)1 (C)25 (D)27

<解析>

$28=2^2 \times 7$ ，考慮 4 的倍數與 7 的倍數

① 4 的倍數 $1! \div 4 = 0 \dots 1$ ； $2! \div 4 = 0 \dots 2$ ； $3! \div 4 = 1 \dots 2$ ； $4! \div 4 = 6 \dots 0$

$\therefore (1+2+2) \div 4 = 1 \dots 1$ ， $(1!+2!+3!+\dots+100!)^2 \div 4$ 的餘數為 $1^2 = 1 \div 4 = 0 \dots 1$

② 7 的倍數 $1! \div 7 = 0 \dots 1$ ； $2! \div 7 = 0 \dots 2$ ； $3! \div 7 = 0 \dots 6$ ； $4! \div 7 = 3 \dots 3$ ； $5! \div 7 = 17 \dots 1$ ； $6! \div 7 = 102 \dots 6$

$\therefore (1+2+6+3+1+6) \div 7 = 2 \dots 5$ ， $(1!+2!+3!+\dots+100!)^2 \div 7$ 的餘數為 $5^2 \div 7 = 3 \dots 4$

4 的同餘類為 1、5、9、13、17、21、25，則取 $25 \div 4 = 7 \dots 1$ ，餘數為 25，選 C。

2. $f(x)=a^x$ ， $f(2x)=5$ ，則 $\frac{f(3x)+f(-3x)}{f(x)+f(-x)} = \frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}} = \frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}} = a^{2x} - 1 + a^{-2x} = 5 - 1 + \frac{1}{5} = \frac{21}{5}$ ，選 D。

<解析>

$\frac{f(3x)+f(-3x)}{f(x)+f(-x)} = \frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}} = \frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}} = a^{2x} - 1 + a^{-2x} = 5 - 1 + \frac{1}{5} = \frac{21}{5}$ ，選 D。

3. 從數字集合{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9}中任意選出三個不重複的數字，組成一個三位數，並滿足大於 234 的三位偶數共有多少個? (A)64 (B)70 (C)75 (D)80

<解析>

①(百位數為 3、5、9)×(個位數為 4、6、8)×(十位數的選擇)→ $3 \times 3 \times 5 = 45$

②(百位數為 4、6、8)×(個位數剩 2 個偶數可選)×(十位數的選擇)→ $3 \times 2 \times 5 = 30$

共有 $45+30=75$ 個，選 C。

4. 已知實數 x, y 滿足: $(7.2)^x = (0.8)^y = 3$, 求 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} =$ _____。 (A)-3 (B)3 (C)-2 (D)2

<解析>

$$(7.2)^x = 3 \rightarrow 7.2 = 3^{\frac{1}{x}} \dots \textcircled{1}$$

$$(0.8)^y = 3 \rightarrow 0.8 = 3^{\frac{1}{y}} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{7.2}{0.8} = \frac{3^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{y}}} \rightarrow 9 = 3^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}, 3^2 = 3^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2, \text{ 選 D}$$

5. 設二次函數 $f(x) = x^2 - 4x + 7$, 其定義域為 $-1 \leq x \leq a$ 。若函數值 $y = f(x)$ 的最大值為 12, 最小值為 3, 則實數 a 的可能範圍可表示為 $m \leq a \leq n$, 求有序數對 $(m, n) =$ _____。 (A) (2, 5) (B) (3, 6) (C) (4, 7) (D) (5, 8)

<解析>

$$\textcircled{1} y = f(x) = (x-2)^2 + 3 \text{ 最小值 } 3 \rightarrow x=2 \therefore a \geq 2$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } f(x) = 12 \rightarrow x^2 - 4x + 7 = 12, x^2 - 4x - 5 = 0, (x-5)(x+1) = 0, x=5 \text{ 或 } x=-1$$

$$\textcircled{3} a \text{ 的可能範圍 } m \leq a \leq n \rightarrow a=5, \text{ 即 } 2 \leq a \leq 5, (m, n) = (2, 5), \text{ 選 A。}$$

6. For the equation $(x-a)(x-8)-1=0$, if it has **two integer solutions**, find the value of a .
(A)6 (B)8 (C)-6 (D)-8

<解析>

$$(x-a)(x-8)-1=0 \rightarrow (x-a)(x-8)=1=1 \times 1 = (-1) \times (-1)$$

$$\textcircled{1} \text{ 當 } x-a=1, x-8=1, \text{ 得 } x=9, a=8$$

$$\textcircled{2} \text{ 當 } x-a=-1, x-8=-1, \text{ 得 } x=7, a=8$$

$$\therefore a=8, \text{ 選 B。}$$

7. 已知一個等比數列, 首項為正數, 公比為正數, 其前四項和為 600, 前兩項的積為 675, 求前兩項之和。 (A)56 (B)60 (C)64 (D)68

<解析>

設首項= a , 公比= r

$$a + ar + ar^2 + ar^3 = 600 \rightarrow a(1+r+r^2+r^3) = 600$$

$$\text{且 } a \times ar = 675, a^2 r = 675, 675 = 5^2 \cdot 3^3$$

$$\textcircled{1} a=5, r=25 \rightarrow r^3 > 600 \text{ (不合)}$$

$$\textcircled{2} a=3, r=75 \rightarrow r^3 > 600 \text{ (不合)}$$

$$\textcircled{3} a=15, r=3, 15 \times (1+3+9+27) = 600 \text{ (合理)}$$

$$\text{故前兩項之和} = 15 \times (1+3) = 60, \text{ 選 B。}$$

8. Compute the exact of $\cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ$. (A) $\frac{\sqrt{6}}{8}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

<解析>

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{8}, \text{ 選 A.}$$

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. Let the sequence $\{a_n\}$ be defined by, $a_1=2$ and $a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$ for $n \geq 1$. Find the sum of the first 2026 terms of the sequence: $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2026}=\underline{\hspace{2cm}}$.

<解析>

$$a_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, a_3=1-\frac{1}{a_2}=-1, a_4=1-\frac{1}{a_3}=2=a_1, \text{ 得知 } a_5=a_2, a_6=a_3$$

故 $\{a_n\}$ 為週期數列: $2, \frac{1}{2}, -1, 2, \frac{1}{2}, -1, \dots$

$$\therefore a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2026} = \left(2+\frac{1}{2}-1\right) \times 675 + 2 = \frac{2025}{2} + 2 = \frac{2029}{2}$$

2. 已知二次函數 $f(x)=-2x^2+8x+(k-5)$ ，若對任何實數 x ，都有 $f(x)<0$ ，求實數 k 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$.

<解析>

$$f(x)=-2x^2+8x+(k-5)<0 \text{ 恆成立}$$

$$\rightarrow a=-2<0 \text{ 且 } D=8^2-4 \times (-2) \times (k-5)<0$$

$$\therefore 64+8(k-5)<0 \rightarrow k-5<-8, k<-3$$

3. 七名學生甲、乙、丙、丁、戊、己、庚排成一列。已知甲與乙必須相鄰，而丙與丁不得相鄰。問共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種不同的排列方式。

<解析>

① 甲、乙為一組與戊、己、庚任意排列，有 $2 \times 4! = 48$ 種

② 甲乙、戊、己、庚 產生 5 個間隔，丙先選，丁後選，兩人不相鄰，有 $5 \times 4 = 20$ 種
共有 $48 \times 20 = 960$ 種

4. 設圓 $C: x^2+y^2-2x-24=0$ 與直線 $L: 3x+4y+k=0$ 相交於相異兩點，則實數 k 的範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

<解析>

$$x^2+y^2-2x-24=0 \rightarrow (x-1)^2+y^2=25, \text{ 即圓心}(1, 0), \text{ 半徑 } r=5$$

圓與直線相交於相異兩點

$$\text{圓心到直線 } L \text{ 的距離} = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 0 + k|}{\sqrt{3^2+4^2}} < 5 \rightarrow |k+3| < 25, -25 < k+3 < 25, -28 < k < 22$$

5. Let a and b be positive real numbers satisfying $a+2b=144$. Find the maximum value of ab .

<解析>

$$\frac{a+2b}{2} \geq \sqrt{a \times 2b}, \frac{144}{2} \geq \sqrt{2ab}, 72 \geq \sqrt{2ab}, 5184 \geq 2ab, 2592 \geq ab$$

\therefore 最大值為 2592

6. 設點 $A(3, 5)$ 對直線 L 的投影點為 $A_0(7, -1)$ ，求 L 的直線方程式為_____。(寫成 $ax+by=c$ 的形式，其中 a 為正整數且 $|a|$ 、 $|b|$ 互質)

<解析>

$\overline{A_0A}$ 的斜率為 $\frac{-1-5}{7-3} = \frac{-6}{4}$ ，則直線 L 的斜率為 $m \times \frac{-6}{4} = -1$ ， $m = \frac{4}{6}$

利用點斜式，則 $L: y = \frac{4}{6}(x-7) - 1$ ， $6y = 4x - 28 - 6$ ， $4x - 6y - 34 = 0$ ， $2x - 3y = 17$

7. 已知一等比級數為 $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \dots$ ，若其前 n 項和大於 2000，求 n 至少為_____。

<解析>

前 n 項和 $= \frac{\frac{1}{16}(2^n - 1)}{2 - 1} = \frac{2^n}{16} - \frac{1}{16} > 2000$ ， $2^{n-4} > 2000 \frac{1}{16}$ ，當 $n=14$ ， $2^{10} = 1024 < 2000 \frac{1}{16}$ (不合)

故 $n=15$ ， $2^{11} = 2048 > 2000 \frac{1}{16}$ ，取 $n=15$ 。

8. 已知圓上有三個點 $A(3, 0)$ 、 $B(9, 0)$ 和 $C(x, y)$ ，圓的半徑為 5。要使得三角形 ABC 面積最大，求 C 點坐標為_____。

<解析>

令圓心為 O ，取 M 為 A 、 B 中點，則 $\overline{AM} = \frac{(9-3)}{2} = 3$ ，且圓的半徑 $= 5$

得 $\overline{MO} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ，故圓心 $O(3+3, 0+4) = (6, 4)$ 或 $O(3+3, 0-4) = (6, -4)$

要使 $\triangle ABC$ 面積最大，以 \overline{AB} 為底時， C 點恰位於 \overline{AB} 之中垂線上 \rightarrow 高最長

故 $C(6, 4+5) = (6, 9)$ 或 $C(6, -4-5) = (6, -9)$ (3 分/5 分)

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 設多項式 $f(x)$ 為實係數多項式，且滿足 $f(x)$ 除以 $x^2 - 6x + 9$ 的餘式為 $2x + 1$ ； $f(x)$ 除以 $x + 3$ 的餘式為 31。

(1) $f(3)$ 之值。(4 分)

(2) 求 $f(x)$ 除以 $(x-3)^3$ 的餘式。(6 分)

<解析>

(1) $f(x) = (x+3)(x^2 - 6x + 9)p(x) + a(x^2 - 6x + 9) + 2x + 1$

$\rightarrow f(x) = (x+3)(x-3)^2 p(x) + a(x-3)^2 + 2x + 1$

$\therefore f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$

(2) 設餘式 $= a(x-3)^2 + b(x-3) + c$

① $f(x)$ 除以 $x^2 - 6x + 9$ 的餘式 $2x + 1 = 2(x-3) + 7$ ，則餘式 $= a(x-3)^2 + 2(x-3) + 7$

② $f(-3) = a(-3-3)^2 + 2(-3-3) + 7 = 31$ ， $36a - 12 + 7 = 31$ ， $36a = 36$ ， $a = 1$

得餘式 $= (x-3)^2 + 2(x-3) + 7 = x^2 - 4x + 10$

2. 設 x, y 為整數，滿足聯立方程式 $\begin{cases} xy+x+y+19=0 \\ x^2-y^2=3x-51 \end{cases}$ ，求所有整數解 (x, y) 。

<解析>

$$x^2-y^2=3x-51 \rightarrow x^2-3x-51-y^2=0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(51-y^2)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-204+4y^2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{4y^2-195}}{2} \in Z$$

$\therefore 4y^2-195$ 是平方數且為奇數

$$\text{令 } 4y^2-195=k^2, 4y^2-k^2=195, (2y+k)(2y-k)=15 \times 13=(-15)(-13)$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2y+k=15 \\ 2y-k=13 \end{cases} \rightarrow y=7, k=1, x=\frac{3 \pm 1}{2}=2 \text{ 或 } 1$$

$(2, 7)$ 、 $(1, 7)$ 代入 $xy+x+y+19=0 \rightarrow$ 不合

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2y+k=-15 \\ 2y-k=-13 \end{cases} \rightarrow y=-7, k=-1, x=\frac{3 \pm 1}{2}=2 \text{ 或 } 1$$

將 $(2, -7)$ 代入 $xy+x+y+19=0 \rightarrow -14+2-7+19=0$ (合理)

將 $(1, -7)$ 代入 $xy+x+y+19=0 \rightarrow -7+1-7+19 \neq 0$ (不合)

故整數解 $(x, y)=(2, -7)$