第二十二屆IMC國際數學競賽台灣區複賽
22nd International Mathematics Contest (Taiwan)

高中二年級試卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：______________ 准考證號碼：______________ 試題總分：_______________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，**並減少塗改**，請保持答案清楚!
◎計算題需要在試題空白處**列出運算過程**，只寫答案沒有運算過程不計算成績!

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	A	B	C	C	B	D
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	-1 或 7 (3 分/5 分)	1	$\sqrt{6}$	2024	$(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$	(3, 7)	$\pm\frac{23\sqrt{2}}{27}$ (3 分/5 分)	35

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 設 $a=\log_3 2$， $b=\log_9 5$， $c=\log_{\frac{1}{3}} 2$， $d=\log_{\sqrt{3}} 2$，則此四數的大小關係為下列何者?
(A)$d>a>b>c$ (B)$b>c>a>d$ (C)$d>c>a>b$ (D)$d>b>a>c$

<解析>

$a=\log_3 2$；$b=\log_9 5=\log_3 5^{\frac{1}{2}}=\log_3 \sqrt{5}$

$c=\log_{\frac{1}{3}} 2=\log_3 2^{-1}$； $d=\log_{\sqrt{3}} 2=\log_3 4$，因為$y=\log_3 x$為遞增函數

$\therefore \log_3 4>\log_3 \sqrt{5}>\log_3 2>\log_3 2^{-1} \rightarrow d>b>a>c$，選 D。

2. If 1!+2!+3!+4!+….+2026! is divided by 144, then the remainder is _______.
(A)9 (B)10 (C)11 (D)12

<解析>

$144=2^4\cdot 3^2$，而 $6!=2^4\cdot 3^2\cdot 5$

當$n\geq 6$時，$n!$能被 144 整除，只需計算前 5 項

(1!+2!+3!+4!+….+2026!)|144=(1!+2!+3!+4!+5!) |144

=(1+2+6+24+120=153)|144 $\rightarrow$ 餘數=9，選 A。

3. 方程式$x^{\log x}=10^6 x$ 之解為_______. (A)10^3或10^{-2} (B)10^2或10^{-3} (C)10^5或10^{-3} (D)10^3或10^{-5}

<解析>

$\log(x^{\log x})=\log(10^6 x)$，$(\log x)^2=6+\log x$，$(\log x)^2-\log x-6=0$

$\therefore (\log x-3)(\log x+2)=0 \rightarrow \log x=3$ 或 $\log x=-2$

故$x=10^3$ 或 $x=10^{-2}$，選 A。

4. 設 $0\le x\le\pi$，求 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 之最大值為 m，最小值為 n，則 $m+n$ =?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

<解析>

$y=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$，且 $0\le x\le\pi$，$\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$

①當 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 時，$\sin(x+\frac{\pi}{6})=1\to y$ 的最大值為 2，則 $m=2$

②當 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，即 $x=\pi$ 時，$\sin(x+\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}\to y$ 的最小值為-1，則 $n=-1$

故 $m+n=2+(-1)=1$，選 B。

5. Find the distance between the two planes, $x-2y+2z-1=0$ and $2x-4y+4z+5=0$.

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{7}{4}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{5}{4}$

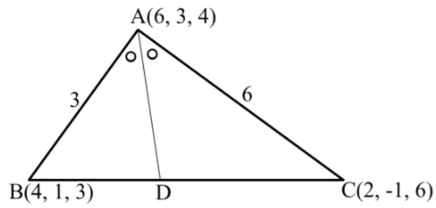
<解析>

$2x-4y+4z+5=0 \Rightarrow x-2y+2z+\frac{5}{2}=0$

∴兩平面間的距離為 $\frac{\left|-1-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{7}{6}$，選 C。

6. 在空間中，已知三角形 ABC 的頂點為 $A(6, 3, 4)$、B(4, 1, 3)、$C(2, -1, 6)$，設 $\angle BAC$ 之平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，並令 E 為射線 $\overrightarrow{AD}$ 上的一點，若 $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{AC}$，則 p=? (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

<解析>



$\overline{AB}=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$，$\overline{AC}=\sqrt{4^2+4^2+(-2)^2}=6$

∴由內分比性質得知: $\overline{BD}:\overline{DC}=3:6=1:2$

則 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{1+2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{1+2}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AE}=\mathrm{k}\overrightarrow{AD}=\frac{2k}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{AC}$，

得 $\frac{2k}{3}=3$，$k=\frac{3}{2}$

∴ $p=\frac{k}{3}=\frac{9}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$，選 C。

7. 這次數學測驗共有 25 題單一選擇題，每題都有五個選項，每答對一題可得 4 分，答錯倒扣 1 分。若阿芳確定其中 16 題答對；有 6 題的五個選項中，她確定有兩個選項不正確，因此這 6 題她就從剩下的選項中猜選一個答案；另外 3 題只好隨意亂猜。阿芳這次測驗的期望值是_______分。(A)67 (B)68 (C)69 (D)70

<解析>

$E=\underbrace{16\times4}_{\text{確定答對}}+\underbrace{6\times4\times\frac{1}{3}}_{\text{6 題 3 選 1 猜中}}+\underbrace{6\times(-1)\times\frac{2}{3}}_{\text{6 題 3 選 1 猜錯}}+\underbrace{3\times4\times\frac{1}{5}}_{\text{3 題 5 選 1 猜中}}+\underbrace{3\times(-1)\times\frac{4}{5}}_{\text{3 題 5 選 1 猜錯}}=64+8-4+0=68$(分)，選 B。

8. $(4x+\frac{1}{2\sqrt{x}})^9$ 的展開式中之常數項為_______。 (A)28 (B)56 (C)72 (D)84

<解析>

原式 $=4x+\frac{1}{2\sqrt{x}}=4x+\frac{\sqrt{x}}{2x}$，則 $\left(4x+\frac{\sqrt{x}}{2x}\right)^9$ 的常數項為 $C_3^9\times(4x)^3\times(\frac{\sqrt{x}}{2x})^6=84\cdot64x^3\cdot\frac{x^3}{64x^6}=84$，選 D。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. Let $\boldsymbol{k}$ be a real number. Consider the system of linear equations:

$$\begin{cases}(4-\boldsymbol{k})x+6y=0\\ 5x+(4-2\boldsymbol{k})y=0\end{cases}$$

If this system has a solution other than (0, 0), find the value of $\boldsymbol{k}$.

<解析>

有(0, 0)以外的的解➔有無限多組解

$\triangle=\begin{vmatrix}4-k & 6\\ 5 & 4-2k\end{vmatrix}=0$，$(4-k)(4-2k)-30=0$，$16-4k-8k+2k^2-30=0$

$\therefore k^2-6k-7=0$，$(k-7)(k+1)=0$，$k=-1$ 或 7 (答對 1 個給 3 分，全對給 5 分)

<另解>

平面上兩條直線重疊，故係數成比例

$\frac{4-k}{5}=\frac{6}{4-2k}$，$(4-k)(4-2k)=30$，$16-4k-8k+2k^2-30=0$ $\therefore k^2-6k-7=0$，$(k-7)(k+1)=0$，$k=-1$ 或 7

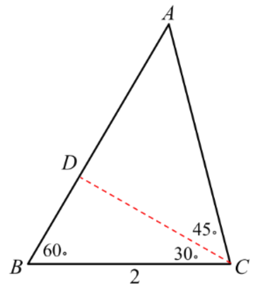
2. 設 n 為正整數，a、b 為正實數，且滿足 $a+b=4$，則$\frac{2^n}{2^n+a^n}+\frac{2^n}{2^n+b^n}$的最小值是________。

<解析>

原式$=\frac{1}{1+\left(\frac{a}{2}\right)^n}+\frac{1}{1+\left(\frac{b}{2}\right)^n}=\frac{1+\left(\frac{b}{2}\right)^n+1+\left(\frac{a}{2}\right)^n}{[1+\left(\frac{a}{2}\right)^n][1+\left(\frac{b}{2}\right)^n]}=\frac{2+\left(\frac{b}{2}\right)^n+\left(\frac{a}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{a}{2}\right)^n+\left(\frac{b}{2}\right)^n+\left(\frac{ab}{4}\right)^n}\geq\frac{2+\left(\frac{b}{2}\right)^n+\left(\frac{a}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{a}{2}\right)^n+\left(\frac{b}{2}\right)^n+1}=1$ ，故最小值=1

$\left(\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\right.$，$2\geq\sqrt{ab}$，$\left.1\geq\frac{ab}{4}\right)$

3. △ABC 中，若$\angle B=60°$，$\angle C=75°$，且$\overline{BC}=2$，則$\overline{AC}=$________。



<解析>

過 C 作$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，交$\overline{AB}$於 D

$\triangle BCD$ 為30°-60°-90°直角三角形，得$\overline{CD}=\sqrt{3}$

且$\triangle ACD$ 為45°-45°-90°直角三角形，得$\overline{AC}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{6}$

4. Consider the sequence $\{a_n\}$ defined for **positive integers** $n\geq1$ by:

$a_1=1,\ a_n=a_{n-1}+n\ \ (n\geq2)$

Let $S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$, find S_{22}.

<解析>

$a_1=1,\ a_2=a_1+2=3,\ a_3=a_2+3=6,\ a_4=a_3+4=10,\ \ldots\rightarrow a_n=1+2+3+..+n=\frac{n(n+1)}{2}$

故$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$➔$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$\therefore S_{22}=\frac{22\times23\times24}{6}=2024$

5. 已知方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 之解為(-2, 1)，則方程組 $\begin{cases} b_1x+2c_1y=3a_1 \\ b_2x+2c_2y=3a_2 \end{cases}$ 之解(x, y)為________。

<解析>

將(-2, 1)代入$-2a_1+b_1=c_1$，$a_1=\frac{1}{2}(b_1-c_1)$

且$b_1x+2c_1y=3a_1 \to b_1x+2c_1y=\frac{3}{2}(b_1-c_1)=\frac{3}{2}b_1-\frac{3}{2}c_1$

$\therefore b_1(x-\frac{3}{2})+2c_1(y+\frac{3}{4})=0$，得 $x=\frac{3}{2}$，$y=-\frac{3}{4}$

$\therefore \begin{cases} b_1x+2c_1y=3a_1 \\ b_2x+2c_2y=3a_2 \end{cases}$ 之解為$(x, y)=(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$

6. 若實數 x, y 滿足 $9^x+3^y=108\cdot 3^x$，且 $x+y=10$，求$(x, y)=$________。

<解析>

$x+y=10$，$y=10-x$，且 $9^x+3^y=108\cdot 3^x$，$3^{2x}+3^y=108\cdot 3^x$，$3^{2x}+3^{10-x}=108\cdot 3^x$

同除3^x，因$3^x>0$，$3^x+3^{10-2x}=108$，令 $t=3^x>0$，得 $t+\frac{3^{10}}{t^2}=108$，$t^3-108t^2+3^{10}=0$

$t^2(t-108)=-3^{10}=3^6\times(-3^4)=27^2\times(-81)$，得 $t=27$，故$3^x=27$，$x=3$，$y=10-3=7$，則$(x, y)=(3, 7)$

7. 設實數θ滿足 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$，且$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求$\sin 3\theta+\cos 3\theta=$________。

<解析>

①$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{16}{9}$，$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{16}{9}$，$\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{18}$

②$(\sin\theta-\cos\theta)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4(\sin\theta\cos\theta)=\frac{16}{9}-4\times\frac{7}{18}=\frac{16}{9}-\frac{14}{9}=\frac{2}{9}$，$\sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\sin 3\theta+\cos 3\theta=-4\sin^3\theta+3\sin\theta+4\cos^3\theta-3\cos\theta=-4(\sin^3\theta-\cos^3\theta)+3(\sin\theta-\cos\theta)$

$(\sin\theta-\cos\theta)[3-4(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)]=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\left[3-4(1+\frac{7}{18})\right]=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\times(-\frac{23}{9})=\pm\frac{23\sqrt{2}}{27}$

8. 坐標空間中，設 $\overrightarrow{u}=(1, 2, 3)$，$\overrightarrow{v}=(3, 0, -1)$，$\overrightarrow{w}=(x, y, z)$ 為空間中三條向量，且向量$\overrightarrow{w}$與向量$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$平行，若行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix}=-70$，則$x^2+y^2+z^2=$________。

<解析>

$\overrightarrow{t}=\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-2)\vec{i}+10\vec{j}-6\vec{k}$，得$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(-2, 10, -6)$

且$|\overrightarrow{t}|=\sqrt{(-2)^2+10^2+(-6)^2}=2\sqrt{35}$

已知向量$\overrightarrow{w}$與向量$\overrightarrow{t}$平行，其夾角θ為0°或180°

$|\overrightarrow{t}\cdot\overrightarrow{w}|=|\overrightarrow{t}|\times|\overrightarrow{w}|\times\cos\theta=2\sqrt{35}\times|\overrightarrow{w}|$，$-70=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix}=(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{t}\cdot\overrightarrow{w}$

$\therefore 70=|\overrightarrow{t}\cdot\overrightarrow{w}|=2\sqrt{35}\times|\overrightarrow{w}| \Rightarrow |\overrightarrow{w}|=\frac{70}{2\sqrt{35}}=\sqrt{35}$

即$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{35}\to x^2+y^2+z^2=35$

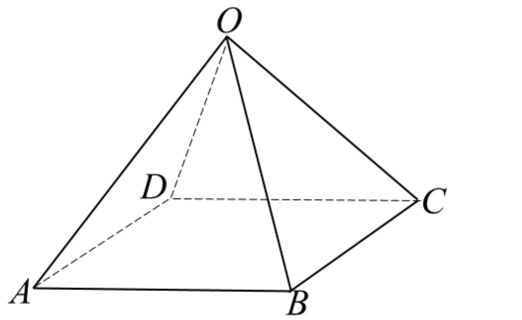
三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 已知一正四角錐，其底面為正方形，體積為 96 cm^3，且底面正方形的對角線長為 $4\sqrt{6}$ cm。設此正四角錐任一側面與底面所夾的二面角為 θ。試求:

(1) 底面正方形的邊長是多少公分? (3 分)

(2) 錐體的高是多少公分? (3 分)

(3) $cos\,\theta$ 的值。(以**最簡分數**作答) (4 分)



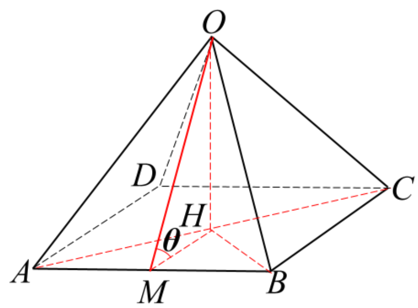
<解析>

(1) 設正方形的邊長 $\overline{AB}$ 為 a 公分

$a\times a=(4\sqrt{6})^2\div 2$，$a^2=48$， $a=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ (公分)

(2) 過 O 點作 $\overline{OH}\perp$ 底面 ABCD，交於 H 點 (如右圖)

$\rightarrow$ $\frac{1}{3}\times\overline{OH}\times$底面積 ABCD=96，$\frac{1}{3}\times\overline{OH}\times(4\sqrt{3})^2=96$，$\overline{OH}=6$ (公分)



(3) 取 $\overline{AB}$ 中點 M，

則 $\overline{OM}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+6^2}=4\sqrt{3}$；$\overline{MH}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{MH}}{\overline{OM}}=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

2. 設 x, y 為實數，滿足聯立方程式 $\begin{cases} xy+x+y+19=0 \\ x^2y+xy^2+20=0 \end{cases}$ 試求:

(1) $x+y$ 與 xy 的值。(各 2 分)

(2) 求出所有(x, y)的實數解。(每求得一組正確解，給 1.5 分，採四捨五入計分)

<解析>

(1) $x+y=m$，$xy=n$，$\begin{cases} xy+x+y+19=0 \\ x^2y+xy^2+20=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy+x+y+19=0 \\ xy(y+x)+20=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m+n+19=0 \text{ ......①} \\ mn+20=0 \text{ ......②} \end{cases}$

由①→$m=-19-n$ 代入②，得 $n(-19-n)+20=0$，$n^2+19n-20=0$

$(n+20)(n-1)=0$，$n=-20$ 或 $n=1$

①當 $n=-20$，則 $m=-19+20=1$ ➔ $x+y=1$、$xy=-20$ (2 分)

②當 $n=1$，則 $m=-19-1=-20$ ➔ $x+y=-20$、$xy=1$ (2 分)

(2)

① 當 $x+y=1$、$xy=-20$，得$(x, y)=(5, -4)$或$(-4, 5)$

② 當 $x+y=-20$、$xy=1$，得 $y=-20-x$，代入 $xy=1$

➔ $x(-20-x)=1$，$x^2+20x+1=0$， $x=-10\pm 3\sqrt{11}$

① $x=-10+3\sqrt{11}$， $y=-10-3\sqrt{11}$

② $x=-10-3\sqrt{11}$， $y=-10+3\sqrt{11}$，得$(x, y)=(-10+3\sqrt{11}, -10-3\sqrt{11})$或$(-10-3\sqrt{11}, -10+3\sqrt{11})$

故(x, y)有四組實數解 $(5, -4)$、$(-4, 5)$、$(-10+3\sqrt{11}, -10-3\sqrt{11})$、$(-10-3\sqrt{11}, -10+3\sqrt{11})$

(每求得一組正確解，給 1.5 分，採四捨五入計分)