第二十二屆IMC國際數學競賽台灣區複賽
22nd International Mathematics Contest (Taiwan)

國中三年級試卷

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

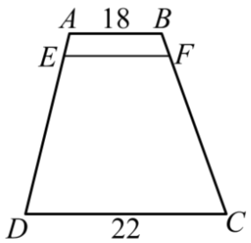
考生姓名：______________ 准考證號碼：______________ 試題總分：_______________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，**並減少塗改**，請保持答案清楚!

◎計算題需要在試題空白處**列出運算過程**，只寫答案沒有運算過程不計算成績!

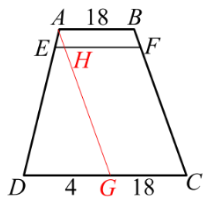
選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	B	D	D	B	C	A
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	5	$\frac{2027}{4052}$	288	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	12	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$	80°	$\frac{19}{2}$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)



1. 如圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{BF}:\overline{FC}=1:7$，$\overline{EF}//\overline{AB}$，若$\overline{AB}=18$，$\overline{CD}=22$，則$\overline{EF}=$?
(A)18.5 (B)19.5 (C)20.5 (D)21.5

<解析>



過 A 點作$\overline{AG}//\overline{BC}$，交$\overline{EF}$於 H，交$\overline{DC}$於 G

令$\overline{EH}=x$，$\frac{x}{4}=\frac{1}{1+7}=\frac{1}{8}$，$8x=4$，$x=\frac{1}{2}$

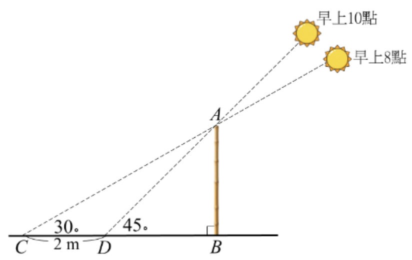
則$\overline{EF}=18+\frac{1}{2}=18.5$，選 A。

2. The distance between the two points where the quadratic function $y=3x^2-2x-5$ intersects the x-axis is ____. (A) $\frac{4}{3}$ (B) 2 (C) $\frac{8}{3}$ (D) 3

<解析>

令 $y=0$，$3x^2-2x-5=0$，$(3x-5)(x+1)=0$，$x=-1$ 或 $x=\frac{5}{3}$

得兩交點$(\frac{5}{3}, 0)$、$(-1, 0)$，兩點的距離=$\left|\frac{5}{3}-(-1)\right|=\frac{8}{3}$，選 C。



3. 一根直立於水平地面的竹竿AB，早上 8 點時竹竿的影子長 BC，上午 10 點時的影子長BD。已知影子長相差 2 公尺，且此時太陽的仰角分別為 8 點時 30 度、10 點時 45 度，求竹竿的高度 AB 是多少公尺? (A)$\sqrt{3}-1$ (B)$\sqrt{3}+1$ (C)$\sqrt{2}-1$ (D)$\sqrt{2}+1$

<解析>

令竹竿長度$\overline{AB}=x$ 公尺，則$\overline{BD}=\overline{AB}=x$，$\overline{BC}=\sqrt{3}x$

且$\overline{BC}-\overline{BD}=2$ → $\sqrt{3}x-x=2$，$x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$，選 B。

4. 將點$(1, \sqrt{3})$繞原點順時針旋轉120°後得到的點坐標為________.
(A) $(-1, \sqrt{3})$ (B) $(0, -2)$ (C) $(\sqrt{3}, -1)$ (D) $(1,-\sqrt{3})$

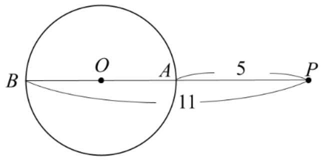
<解析>

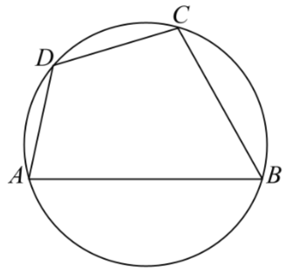
逆時針旋轉120°，點$(1, \sqrt{3})$作 x 軸對稱點，得點$(1, -\sqrt{3})$，選 D。

5. A point P is located outside a circle. The maximum distance from P to a point on the circle is 11 cm, and the minimum distance is 5cm. Determine the radius of the circle. (A)6 (B)5 (C)4 (D)3

<解析>

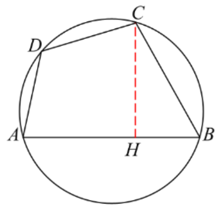
(11-5)÷2=3，選 D。





6. 在圓內接四邊形 ABCD 中，已知$\overline{AB}$=3，$\overline{BC}$=2，$\overline{CA}=\sqrt{7}$，則 $\angle CDA$=________. (A)115° (B)120° (C)130° (D135°

<解析>



過 C 點作$\overline{CH}\perp\overline{AB}$，交$\overline{AB}$於 H

設$\overline{BH}=x$，$2^2-x^2=(\sqrt{7})^2-(3-x)^2$

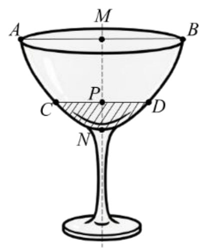
$4-x^2=7-9+6x-x^2$，$6x=6$，$x=1$

得△BCH 為30°-60°-90°直角三角形，$\angle CBA=60°$，

且四邊形 ABCD 為圓內四邊形

$\angle CDA=180°-60°=120°$，選 B。

7. 如圖，一個高腳杯的截面形狀可視為一拋物線，其中 N 為拋物線的頂點。若 M 為$\overline{AB}$的中點，滿足$\overline{AM}=\overline{BM}$。杯內裝水後，當水面寬度$\overline{AB}$=10公分時，水面高度(即水面至頂點的垂直距離)$\overline{MN}$=10公分。若另一水面與拋物線交於 C、D 兩點，且水面寬度$\overline{CD}$=2公分，試求此時水面高度$\overline{PN}$為多少公分? (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$



<解析>

以 N 為原點，畫出平面坐標，則 A(-5, 10)、B(5, 10)、C(-1, $\overline{PN}$)、D(1, $\overline{PN}$)

將 B(5, 10)代入$y=ax^2$ $\rightarrow 10=a\times5^2$，$a=\frac{2}{5}$

$\rightarrow a=\frac{2}{5}$，$y=\frac{2}{5}x^2$，將 $x=1$ 代入$y=\frac{2}{5}\times1^2=\frac{2}{5}$，D(1, $\frac{2}{5}$)，故$\overline{PN}=\frac{2}{5}$，選 C。

8. 原點關於直線$y=2x+1$的對稱點坐標為________。

(A) $(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ (B) $(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$ (C) $(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$ (D) $(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$

<解析>

設對稱點 $A(a, b)$，$\overline{OA}$的中點$(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$，$\frac{b}{2}=\frac{a}{2}\times2+1$，且 $\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}$

① $b=2a+2$

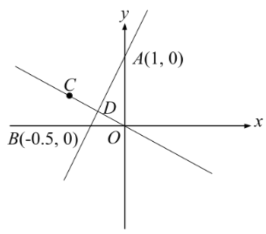
② $a=-2b$

得 $b=-4b+2$，$5b=2$，$b=\frac{2}{5}$，$a=\frac{2}{5}\times(-2)=-\frac{4}{5}$，點坐標為$(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$，選 A。

<另解>圖解法

設點 D 為(x, y)，$\overline{AB}=\sqrt{1^2+(-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\frac{\sqrt{5}}{2}\times\overline{DO}=\frac{1}{2}\times1$，$\overline{DO}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\overline{AD}=\sqrt{1^2-(\frac{\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

①$x^2+y^2=(\frac{\sqrt{5}}{5})^2=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$ ②$x^2+(1-y)^2=(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$

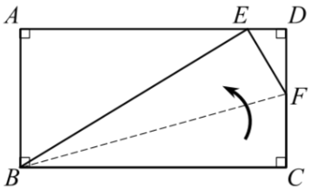


得$(1-y)^2-y^2=\frac{3}{5}$，$5-10y+5y^2-5y^2=3$，$-10y=-2$，$y=\frac{1}{5}$，$x=\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{1}{25}}=\pm\frac{2}{5}$，$x=-\frac{2}{5}$

故對稱點 C: $\frac{(x+0)}{2}=-\frac{2}{5}$，$x=-\frac{4}{5}$；$\frac{(y+0)}{2}=\frac{1}{5}$，$y=\frac{2}{5}$，坐標為$(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 如圖，長方形 $ABCD$ 中，沿$\overline{BF}$將△BCF 對摺，使 C 點落在$\overline{AD}$上之 E 點，若$\overline{AB}$=9公分，$\overline{AE}$=12公分，則$\overline{CF}$是________公分。



<解析>

①$\overline{BC}=\overline{BE}=\sqrt{9^2+12^2}=15$

②△ABE~△DEF (AA 相似)，$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BE}:\overline{EF}$ → $9:3=15:\overline{EF}$

$\therefore \overline{EF}=\overline{CF}=5$公分

2. 計算$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{2026^2}\right)$=________ 。

<解析>

原式$=(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})\ldots((1+\frac{1}{2026})(1-\frac{1}{2026})$

$=(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2})\cdot(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3})\cdot(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3})\cdot(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4})\ldots\ldots(\frac{2025}{2026}\cdot\frac{2027}{2026})=\frac{1}{2026}\times\frac{2027}{2}=\frac{2027}{4052}$

3. 有 4 位男生與 3 位女生排成一直線。若規定所有男生必須相鄰站在一起排，且所有女生亦必須相鄰站在一起，則共有________種不同的排列方式。

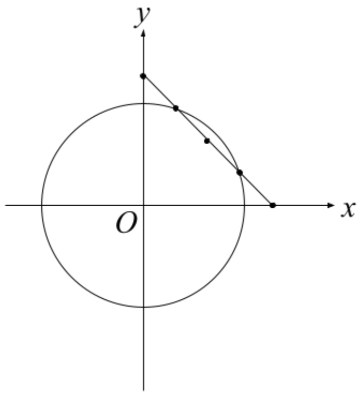
<解析>

①4 位男生任意排列，有 4!=24 種

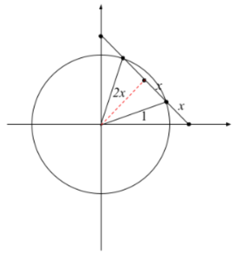
②3 位女生任意排列，有 3!=6 種

故男生一組和女生一組排成直線，共有 24x6x2!=288 種。

4. 圓 O 與以 O 為直角頂點的等腰直角三角形的斜邊的交點恰好是斜邊的 2 個四等分點，若圓的半徑為 1，則等腰直角三角形的斜邊長度為________ 。



<解析>



設斜邊一等分為 x，斜邊上的高$=2x$ ，得$x^2+(2x)^2=1^2$， $x=\frac{\pm\sqrt{5}}{5}$

(取正)，斜邊長為$\frac{\sqrt{5}}{5}\times4=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

5. A triangle has a perimeter (周長) of 24, and all of its side lengths are positive integers. If congruent (全等的) triangles are considered the same, then the number of distinct triangles satisfying these conditions is ________.

<解析>

令三角形的三邊長為 a、b、c ($a\le b\le c$)

$a+b+c=24$，$a+b>c$，$12>c \rightarrow c=8$、9、10、11

$c=8$，$(a, b, c)=(8, 8, 8) \rightarrow$ 1 種

$c=9$，$(a, b, c)=(7, 8, 9)$、$(6, 9, 9) \rightarrow$ 2 種

$c=10$，$(a, b, c)=(4, 10, 10)$、$(5, 9, 10)$、$(6, 8, 10)$、$(7, 7, 10) \rightarrow$ 4 種

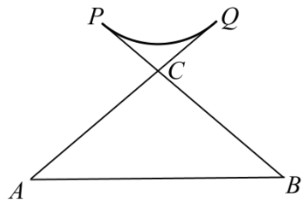
$c=11$，$(a, b, c)=(2, 11, 11)$、$(3, 10, 11)$、$(4, 9, 11)$、$(5, 8, 11)$、$(6, 7, 11) \rightarrow$ 5 種

共有 1+2+4+5=12 種

6. 化簡 $\sqrt{2+\sqrt{3}}=$________。

<解析>

令 $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

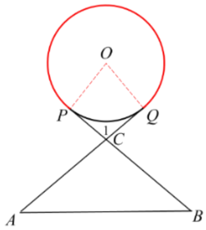


7. 如圖所示，弧 PQ 是圓的一部分，且線段$\overline{PC}$、$\overline{QC}$分別於 P、Q 與弧 PQ 相切，若$\angle A+\angle B=80°$，則弧 PQ 的度數為________。

<解析>

$\angle 1=\angle ACB=180-(\angle A+\angle B)=180°-80°=100°$，

$\angle POQ=360°-(90+90+100)°=80°$，弧 $PQ=80°$



8. Let $y=x^2-4x+\boldsymbol{m}$ be a quadratic function, and let $y=2x+1$ be a line. The line intersects the parabola at two points. If the distance between the two intersection points is $\sqrt{10}$. The value of $\boldsymbol{m}$ is ________.

<解析>

$2x+1=x^2-4x+m$，$x^2-6x+(m-1)=0$

令兩交點坐標(x_1, y_1)、(x_2, y_2)

$x_1+x_2=6$，$x_1x_2=m-1$

$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(\sqrt{10})^2$，$(x_1-x_2)^2+(2x_1+1-2x_2-1)^2=(\sqrt{10})^2$，$(x_1-x_2)^2+4(x_1-x_2)^2=(\sqrt{10})^2$

$(x_1-x_2)^2=2\rightarrow(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_1=2\rightarrow 36-4(m-1)=2$，$-4m+4=-34$，$-4m=-38$，$m=\frac{19}{2}$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 如圖，學校興建一座正四面體玻璃溫室 $ABCD$，其中四個面皆為全等正三角形。為了懸掛植物，欲在溫室內橫架一根鋼柱，其兩端分別固定在面 ABC 與面 ACD 的重心處，分別記為 E、F。

(1) 求線段 EF 與邊 BD 的長度比，即$\overline{EF}:\overline{BD}=$? (6 分)

(2) 若正四面體的邊長為 1，求 A 點至底面$\triangle BCD$ 的垂直距離。(4 分)

<解析>

(1)延長$\overline{AE}$、$\overline{AF}$分別交$\overline{BC}$、$\overline{CD}$於 G、H

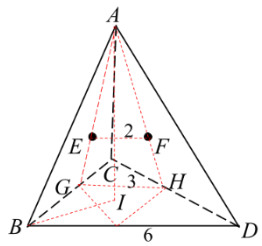
①E 為$\triangle ABC$ 重心$\rightarrow\overline{AE}:\overline{AG}=2:3$

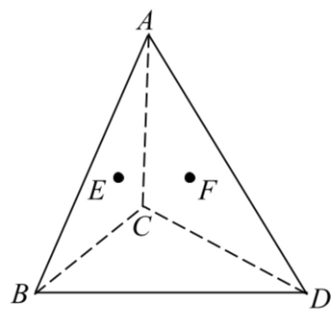
②F 為$\triangle ACD$ 重心$\rightarrow\overline{AF}:\overline{AH}=2:3$

$\rightarrow\overline{EF}//\overline{GH}$，$\triangle AEF\sim\triangle AGH$，$\overline{EF}:\overline{GH}=\overline{AE}:\overline{AG}=2:3$

$\triangle CBD$ 中，G、H 都是$\overline{BC}$、$\overline{CD}$的中點，得$\overline{GH}:\overline{BD}=1:2$

EF:GH:BD=2:3:6，故$\overline{EF}:\overline{BD}=2:6=1:3$

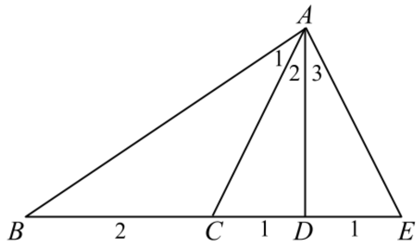




(2)令 I 為$\triangle$BCD 的重心，即頂點 A 到底面$\triangle$BCD 之垂足，$\overline{AB}=1$，$\overline{BI}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$

故$\overline{AI}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$。

2. 如圖。在△ABC 中，∠1=∠2=∠3，$\overline{BC}$=2，$\overline{CD}$=$\overline{DE}$=1，求:



(1) $\overline{AD}$=? (5 分)

(2) $\overline{AC}$=? (5 分)

<解析>

① △ACE 中，∠2=∠3

$\therefore \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}=\frac{1}{1}$，$\overline{AC}=\overline{AE}$

②△ABD 中，∠1=∠2

$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}=\frac{2}{1}$

③△ACE 是等腰△，∠2=∠3 → $\overline{AD}\perp\overline{CE}$

令$\overline{AD}=y$，$\overline{AC}=\overline{AE}=x$，$\overline{AB}=2y$

$\begin{cases} x^2=y^2+1^2 \\ (2y)^2=y^2+3^2 \end{cases}$，則$4y^2-y^2=9$，$y=\sqrt{3}$，則 $x=2$

即$\overline{AD}=\sqrt{3}$，$\overline{AC}=2$