

第二十二屆  國際數學競賽台灣區複賽
22nd International Mathematics Contest (Taiwan)

國
中
二
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：_____ 准考證號碼：_____ 試題總分：_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，並減少塗改，請保持答案清楚! ◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績!								
選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	A	B	D	A	C	D
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	23200	45	24	15°	324	9	121	2

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 假設 $x^2+ax+48$ 可分解成兩個一次多項式的乘積，且係數均為整數，請問 a 的值有幾種可能的值? (A)9 (B)10 (C)11 (D)12

<解析>

$48=1\times 48=2\times 24=3\times 16=4\times 12=6\times 8$ ， $a=\pm 49、\pm 26、\pm 19、\pm 16、\pm 14$ ，共 10 種，選 B。

2. 梯形 ABCD 的中線(由梯形兩腰的中點連成的線段)和高的長度分別為 4 和 8，則它的面積為_____。(A)16 (B)24 (C)32 (D)40

<解析>

中線=(上底+下底) \div 2

則梯形面積=中位線 \times 高=4 \times 8=32，選 C。

3. 試求： $998^2+999\times 1000-4=?$ (A)1995000 (B)1996000 (C)1997000 (D)1998000

<解析>

$998^2+999\times 1000-4=(998^2-2^2)+999\times 1000=1000\times 996+999\times 1000=1000\times (996+999)=1995000$

選 A。

4. 已知 5 是關於 x 的方程 $ax^2+4ax-7=0$ 的一個根，則該方程的另一根為_____。

(A)-8 (B)-9 (C)-10 (D)-11

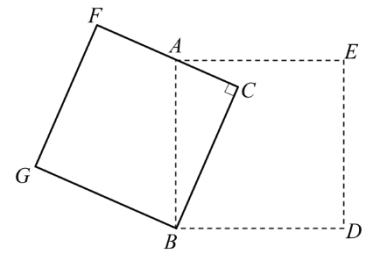
<解析>

$25a+20a-7=0$ ， $45a=7$ ， $a=\frac{7}{45}$

$\frac{7}{45}x^2+\frac{28}{45}x-7=0$ ， $x^2+4x-45=0$ ， $(x+9)(x-5)=0$ ， $x=5$ 或 $x=-9$

則另一根為-9，選 B。

5. As shown in the diagram, in right triangle ABC , $\angle ACB=90^\circ$. Square $ABDE$ has an area of 225, and square $BCFG$ has an area of 144. Find the perimeter (周長) of triangle ABC . (A)12 (B)18 (C)24 (D)36



<解析>

$$\overline{BC}=\sqrt{144}=12, \overline{AB}=\sqrt{225}=15$$

且 $\angle ACB=90^\circ \rightarrow \overline{AC}=\sqrt{15^2-12^2}=9$, 則 $\triangle ABC$ 的周長 $=12+9+15=36$, 選 D。

6. 非零實數 a 、 b 滿足 $5(a^2+b^2)=(2a+b)^2$, 則 $\frac{a}{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(A) 2 (B)-2 (C)3 (D)-3

<解析>

$$\text{原式: } 5a^2+5b^2=4a^2+4ab+b^2, a^2-4ab+4b^2=0$$

$$(a-2b)^2=0, \text{ 得 } a=2b, \text{ 則 } \frac{a}{b} = \frac{2b}{b} = 2$$

7. 已知兩直線 $3x-2y=5$ 和 $ax+y=7$ 的交點坐標為 $(1, b)$, 求 $a \times b$ 的值。(A)-6 (B)6 (C)-8 (D)8

<解析>

$$(1, b) \text{ 代入 } 3x-2y=5, 3-2b=5, b=-1$$

$$\text{將 } (1, -1) \text{ 代入 } ax+y=7, a-1=7, a=8$$

$$\therefore a \times b = 8 \times (-1) = -8, \text{ 選 C。}$$

8. An 11-term geometric sequence (等比數列) is given by a, ar, ar^2, ar^3, \dots . The fifth term is 8 times the eighth term. The sum of the last five terms is 31. Find the sum of all 11 terms.

(A)2043 (B)2044 (C)2045 (D)2047

<解析>

$$\textcircled{1} ar^4 = ar^7 \times 8 \rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} ar^{10} + ar^9 + ar^8 + ar^7 + ar^6 = 31 \rightarrow ar^6(r^4 + r^3 + r^2 + r^1 + 1) = 31$$

$$a \times \frac{1}{64} \times \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right) = 31, a \times \frac{1}{64} \times \frac{1+2+4+8+16}{16} = 31, a = 1024$$

$$\text{故數字和 } 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 2047$$

二、填充題(每題 5 分, 共 40 分)

1. In the table on the right, the numbers in each row and each column form an arithmetic sequence. The sum of all the numbers in the table is _____.

<解析>

每行、每列各 20 個數, 共有 $20 \times 20 = 400$ 個

兩對角線交叉數 58 是平均數

$$\rightarrow \text{總和} = 58 \times 400 = 23200$$

<另解>

$$\frac{(1+58) \times [(58-1) \div 3 + 1]}{2} = 59 \times 10 = 590, 590 + (590 + 20 \times 3) + \dots + (590 + 20 \times 19 \times 3)$$

$$= \frac{590 + 1730}{2} \times 20 = 23200$$

1	4	7	58
4	7	10	61
7	10	13	64
..
55	58	61	112
58	61	64	115

2. 計算 $\sqrt{\sqrt{2026^2 - 2 \times 2027 + 3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

<解析>

① 令 $x=2026$ ，原式 $= x^2 - 2 \times (x+1) + 3 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

② $\sqrt{\sqrt{(x-1)^2}} = \sqrt{x-1} = \sqrt{2025} = 45$

3. 某國中全校共有學生 600 人，各年級之各班人數均相同，且全校班級數恰比每班人數少 10，若配合教育局推行小班制政策，使每班人數減少 5 人，全校應設立的班級數為 _____ 班才能容納原本人數。

<解析>

設全校共有 x 個班級，每班人數為 $(x+10)$ 人

$x(x+10) = 600$ ， $x^2 + 10x - 600 = 0$ ， $(x+30)(x-20) = 600$

$x = 20$ 或 $x = -30$ (不合)

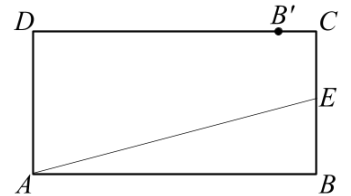
應設立 $600 \div (20 + 10 - 5) = 24$ 班

4. 長方形 ABCD 的 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{BC} = 1$ ， E 是 \overline{BC} 上一點，將長方形沿 AE 對折，此時點 B 恰好落在邊 CD 上，則 $\angle EAB = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

<解析>

$\overline{AB'} = \overline{AB} = 2$ ， $\overline{AD} = 1$ ，則 $\angle B'AD = 60^\circ$

又 $\angle EAB = \angle EAB'$ ，故 $\angle EAB = 15^\circ$ 。



5. 某公司原有員工若干人，其中女性人數與男性人數的比率為 4 : 5，今新進 26 名員工，其中女性 6 人，若新進後女性員工人數占全體員工的 $\frac{3}{7}$ ，則該公司原有員工人數為 _____ 人。

<解析>

設公司原有女性員工有 $4x$ 人，男性員工有 $5x$ 人

$(4x+6):(5x+20) = 3:4$

$15x+60 = 16x+24$ ， $x=36$

共有 $4x+5x=9x=9 \times 36=324$ 人

6. 四個人之間互換禮物，每人都準備了一件禮物，且交換後每人都收到了其他人的禮物，則交換方式有 _____ 種。

<解析>

(1, 2, 3, 4) 的分法: (2, 1, 4, 3)、(2, 4, 1, 3)、(2, 3, 4, 1)、(3, 4, 2, 1)、(3, 1, 4, 2)、(3, 4, 1, 2)

(4, 1, 2, 3)、(4, 3, 2, 1)、(4, 1, 3, 2) 共 9 種

7. 使用面額為 10 元、50 元的硬幣及面額為 100 元的紙鈔，恰可組成總金額 1000 元。若各面額的數量皆可為 0，且不考慮取用的順序，則共有_____種不同的組合方式。

<解析>

令 10 元硬幣 x 個、50 元硬幣 y 個，100 元鈔票 z 張

$$10x+50y+100z=1000$$

$$x+5y+10z=100$$

$$\textcircled{1} z=0, x+5y=100$$

x	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

有 21 種

② $z=1, x+5y=90$ ，有 19 種

③ $z=2, x+5y=80$ ，有 17 種

....

→ $z=10, x+5y=0$ 有 1 種

共有 $1+3+5+\dots+17+19+21=11^2=121$ 種

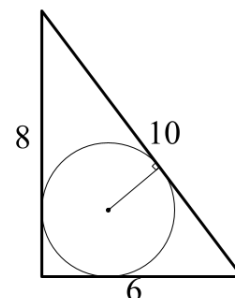
8. A triangle has side lengths 6, 8, and 10. The radius of the inscribed circle of this triangle is _____.

<解析>

設圓的半徑= r ，連接 OA 、 OB 、 OC

$$8 \times 6 \div 2 = 8 \times r \div 2 + 10 \times r \div 2 + 6 \times r \div 2$$

$$48 = 24r, r = 2$$



三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足， $a_1=1, a_n=\frac{4-a_{n-1}}{3-a_{n-1}} (n \geq 2)$ ，試求：

(1) a_4 = _____；(6 分)

(2) 求一般項 a_n = _____。(以 n 表示) (4 分)

<解析>

$$(1) a_1=1, a_2=\frac{4-a_1}{3-a_1}=\frac{3}{2}, a_3=\frac{4-a_2}{3-a_2}=\frac{4-\frac{3}{2}}{3-\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}, a_4=\frac{4-a_3}{3-a_3}=\frac{4-\frac{5}{3}}{3-\frac{5}{3}}=\frac{7}{4}$$

$$(2) a_1=1, a_2=\frac{3}{2}=\frac{2 \times 2 - 1}{2}, a_3=\frac{5}{3}=\frac{2 \times 3 - 1}{3}, a_4=\frac{7}{4}=\frac{2 \times 4 - 1}{4}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{2n-1}{n}$$

2. 從 1 到 100 的整數中挑選兩個不同的數：

(1) 所有可能有幾種？(5 分)

(2) 它們的和是 7 的倍數有幾種？(5 分)

<解析>

$$(1) \frac{100 \times 99}{2} = 4950 \text{ 種}$$

(2) 考慮被 7 除的餘數為，餘 1 和餘 2 各 15 個；餘 3、餘 4、餘 5、餘 6、餘 0 各 14 個。故和是 7 的倍數

只能是 $0+0$ 、 $1+6$ 、 $2+5$ 、 $3+4$ 、故組合數為 $\frac{14 \times 13}{2} + 15 \times 14 + 15 \times 14 + 14 \times 14 = 707$ 種