

第二十二屆  國際數學競賽台灣區複賽
22nd International Mathematics Contest (Taiwan)

國
中
一
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：_____ 准考證號碼：_____ 試題總分：_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，並減少塗改，請保持答案清楚!								
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績!								
選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	B	A	C	C	A	B
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	19.5	-1	4	$-\frac{1}{2}$	7	$(252)_7$	271	1680

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 由於生產成本降低且市場競爭激烈，某廠牌電腦連續調降售價兩次，每次均調降原售價的 10%。若目前每臺電腦的售價為 x 元，則該電腦未調降前的售價為多少元? (A) $0.81x$ (B) $1.21x$ (C) $\frac{x}{1.21}$ (D) $\frac{x}{0.81}$

<解析>

$$\square \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = x, \quad \square \times 0.81 = x, \quad \square = \frac{x}{0.81}, \quad \text{選 D。}$$

2. 數線上點 A 和 B 代表的數分別為 3、7，則數線上動點 P 到 A 和 B 的距離差 $|\overline{PA} - \overline{PB}|$ 的最大值為_____。(A) 2.5 (B) 3 (C) 3.5 (D) 4

<解析>

令 $P(x)$

① P 點在最左邊，則 $|\overline{PA} - \overline{PB}| = |(x-3) - (x-7)| = 4$

② P 點在兩數之間，則 $|\overline{PA} - \overline{PB}| = |(3-x) - (x-7)| = |10-2x| < 4$ ，

③ P 點在最右邊，則 $|\overline{PA} - \overline{PB}| = |(3-x) - (7-x)| = 4$ ，則最大值為 4，選 D。

3. 小婉在計算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$ 時，誤將其中某兩個數字之間「+」號看成「-」號，其餘計算皆正確，若她最後計算得到的結果為 1。請問小婉是看錯了哪兩個數字之間的「+」號? (A) $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ 與 $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$ 與 $\frac{1}{8}$

<解析>

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{12+8+6+4+3+2+1}{24} = \frac{36}{24}, \quad \frac{36}{24} - 1 = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}, \quad \text{把 } \frac{1}{4} \text{ 看成 } -\frac{1}{4}, \quad \text{選 B。}$$

4. In a regular n -gon (正 n 邊形), the difference between each interior angle (內角) and its adjacent exterior angle (外角) is 140° . Find the value of n . (A)18 (B)16 (C)20 (D)22

<解析>

設該正 n 邊形的每個內角為 x ，每個外角為 y

$$\textcircled{1} x+y=180$$

$$\textcircled{2} x-y=140$$

得 $x=(180^\circ+140^\circ)\div 2=160^\circ$ ， $y=180^\circ-160^\circ=20^\circ$ ， $n=\frac{360^\circ}{20^\circ}=18$ ，選 A。

5. Using any three digits from 4,5,6,7,8, form a three-digit number. How many of the resulting three-digit numbers are **multiples of both 3 and 2**? (A)14 (B)15 (C)16 (D)17

<解析>

3 的倍數=(4、5、6)、(5、6、7)、(6、7、8)、(4、6、8)

且符合 2 的倍數:

$$\textcircled{1} 456、546、564、654$$

$$\textcircled{2} 756、576$$

$$\textcircled{3} 678、768、786、876$$

$$\textcircled{4} 468、648、864、684、486、846，共有 4+2+4+6=16 \text{ 種，選 C。}$$

6. $(x^2-3x+1)(2x^2+ax-4)$ 展開後不含 x^3 項，則實數 $a=$ _____。(A)4 (B)5 (C)6 (D)7

<解析>

只要找 x^3 項展開後，得到 $ax+(-3)\times 2=0$ ， $a=6$ ，選 C。

7. 甲、乙、丙三人同年齡，A、B、C、D 四人也同齡，已知這七個人的年齡和是 170 歲。若將甲、乙、丙三人的年齡與 A、B、C、D 四人的年齡互換後，則七個人的年齡總和變為 180 歲。請問甲和 A 的年齡加起來是多少歲? (A)50 (B)60 (C)70 (D)40

<解析>

設甲、乙、丙的年齡為 x 歲，A、B、C、D 的年齡為 y 歲

$$\textcircled{1} 3x+4y=170$$

$$\textcircled{2} 4x+3y=180$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2}\rightarrow 7x+7y=350，x+y=50，故甲與 A 的年齡和為 50 歲，選 A。$$

8. 在 1 到 2026 的所有自然數中，找出所有是 2 或 3 的倍數但不是 5 的倍數的數，求這些數的個數。(A)1075 (B)1081 (C)1087 (D)1093

<解析>

$$2 \text{ 的倍數: } 2026\div 2=1013$$

$$3 \text{ 的倍數: } 2026\div 3=675\dots 1$$

$$6 \text{ 的倍數: } 2026\div 6=337\dots 4$$

$$2 \text{ 或 } 3 \text{ 的倍數共有 } 1013+675-337=1351 \text{ 個}$$

$$10 \text{ 的倍數: } 2026\div 10=202\dots 6$$

$$15 \text{ 的倍數: } 2026\div 15=135\dots 1$$

$$30 \text{ 的倍數: } 2026\div 30=67\dots 6$$

$$202+135-67=270$$

$$\text{共有 } 1351-270=1081 \text{ 個，選 B。}$$

<另解>

$$[2, 3, 5]=30$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

①1~30: 有 16 個; 31~60: 有 16 個;

$$\textcircled{2} 2026 \div 30 = 67 \dots 16$$

1~16 有 9 個

$$\text{故 } 16 \times 67 + 9 = 1081$$

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 若將 300 克 7% 的食鹽水與 200 克 $x\%$ 的食鹽水混合，可得 12% 的食鹽水，請問

$$x = \underline{\hspace{2cm}} \text{。}$$

<解析>

$$300 \times \frac{7}{100} + 200 \times \frac{x}{100} = 500 \times \frac{12}{100}, \quad 300 \times 7 + 200x = 12 \times 500$$

$$2100 + 200x = 6000, \quad 200x = 3900, \quad 2x = 39, \quad x = 19.5$$

2. 計算 $2025 \times 2027 - 2026^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

<解析>

$$\text{令 } x = 2026, \quad (x-1)(x+1) - x^2 = x^2 - 1 - x^2 = -1$$

3. 設運算符號 @ 定義如下:

$$x @ y = ax - by + 4$$

其中 a 、 b 為常數，右邊的運算為一般的加減法與乘法。

已知 $1 @ 2 = 0$ ， $2 @ (-1) = 11$ ，請問 $3 @ 2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

<解析>

$$\textcircled{1} 1 @ 2 = a - 2b + 4 = 0, \quad a - 2b = -4$$

$$\textcircled{2} 2 @ (-1) = 2a + 1b + 4 = 11, \quad 2a + b = 7$$

$$\rightarrow b = 3, \quad a = 2, \quad \text{得 } x @ y = 2x - 3y + 4, \quad \text{則 } 3 @ 2 = 2 \times 3 - 3 \times 2 + 4 = 4$$

4. Given that x and y satisfy $x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$, the value of $x + y$ is _____.

<解析>

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 2 = 0 \rightarrow (x+1)^2 + (2y-1)^2 = 0$$

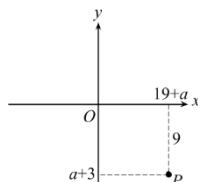
$$\text{得 } x = -1, \quad y = \frac{1}{2}, \quad \text{故 } x + y = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

5. 已知點 $P(19+a, a+3)$ 位於第四象限，且其到 x 軸的距離為 9。請問：點 P 到 y 軸的距離為 _____。

<解析>

$$\textcircled{1} a + 3 = -9, \quad a = -12$$

$$\textcircled{2} |19+a| = |19+(-12)| = |7| = 7, \quad \text{則 } P \text{ 到 } y \text{ 軸的距離為 } 7$$



6. 在七進制計算下 $(12)_7 \times (21)_7 =$ _____。(結果用七進制表示)

(例如: $(123)_5 = 1 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 3 \times 5^0 = 38$)

<解析>

$$(12)_7 = 1 \times 7^1 + 2 \times 7^0 = 9, (21)_7 = 2 \times 7^1 + 1 \times 7^0 = 15$$

$$9 \times 15 = 135, (135)_{10} = (252)_7$$

7. 考慮 1 到 999 的所有正整數，請問：其中至少含有一個數字 7 的數字共有_____個。

<解析>

全部的數字-(百、十、個位都沒有出現 7 的數字)

$$= 999 - (9 \times 9 \times 9 - 1) = 999 - 728 = 271 \text{ (沒有 000, 要扣掉 1 個), 共有 271 個}$$

8. Three black balls, three blue balls, and three white balls are arranged in a row (列). The number of distinct arrangements is _____.

<解析>

$$\text{排列數} = \frac{9!}{3!3!3!} = 1680 \text{ 種}$$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 有一塊長方形木板，用刀片鋸成兩部分，一部分為直角梯形，另一部分為等腰直角三角形，已知：①矩形面積為 112。②直角梯形的周長比等腰直角三角形的周長大 12。試問：

(1) 長方形的長、寬相差多少? (6 分)

(2) 直角梯形的面積是多少? (4 分)

<解析>

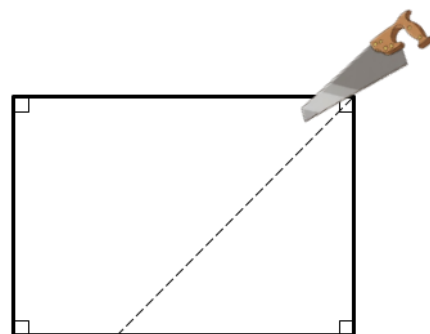
(1) 設長方形的長邊為 x 公分，寬邊為 y 公分

$$x + (x - y) = y + 12 \rightarrow 2x - 2y = 12, x - y = 6$$

$$(2) xy = 112 = 14 \times 8$$

$$\therefore 14 - 8 = 6, \text{長} = 14 \text{ 寬} = 8$$

$$(14 + 6) \times 8 \div 2 = 80$$



2. 非負實數 x, y 滿足 $3x - 2y \leq 5, x + y \leq 3$ ，求 $7x - 3y$ 的最大值與最小值。(5 分/5 分)

<解析>

$$(1) \text{ 最大值: } 7x - 3y = 2(3x - 2y) + (x + y) \leq 13$$

$$(2) \text{ 最小值: } 7x - 3y \geq -3y \geq -9$$