第二十二屆 IMC 國際數學競賽台灣區初賽

22nd International Mathematics Contest (Taiwan)

高中一年級組

考生姓名		試題總分	
准考證號碼			

※參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。

※計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

答案區

一、選擇題(每題 10 分，共 200 分)

題號	1	2	3	4	5
答案	C	C	C	B	B
題號	6	7	8	9	10
答案	C	A	D	B	D
題號	11	12	13	14	15
答案	D	C	B	A	A
題號	16	17	18	19	20
答案	C	C	A	B	B

二、填充題(每題 12 分，共 60 分)

題號	1	2	3	4	5
答案	(11, 10, 6)	$4\sqrt{2}$	45	8	2

考試時間: 60 分鐘，卷面總分:300 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

一、選擇題(每題 10 分，共 200 分，請將答案填入答案表內)

1. 有五位學生，他們的重量(單位為公斤)，分別如下: 44、74、39、42、61，今加入一位學生後，其算術平均數較原先的算術平均數減少 1 公斤，則這六位學生體重之中位數為多少公斤? (A)43 (B)44 (C)45 (D)46

<解析>

由小到大: 39、42、44、61、74

假設學生重量為 x 公斤

$\frac{39+42+44+61+74}{5}=\frac{39+42+44+61+74+x}{6}+1$，$52=\frac{260+x}{6}+1$，$x=46$

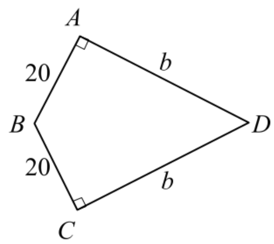
故中位數=(44+46)÷2=45，選 C。

2. $x=\sqrt{200+\sqrt{30}}$，最接近 x 的整數是多少? (A)12 (B)13 (C)14 (D)15

<解析>

$\sqrt{30}=5.47\ldots$(接近 5)

故 $x≒\sqrt{200+5}=\sqrt{205}≒14$，選 C。



3. A quadrilateral is circumscribed about a circle with radius 12. Find b. (A)28 (B)29 (C)30 (D)31

<解析>

$20\times b=\frac{1}{2}\times 12\times(20+b+20+b)$，$20b=240+12b$，$b=30$，選 C。

4. 設 $x>0$，$y>0$，且 $2x+3y=72$，則 xy 之最大值為多少? (A)208 (B)216 (C)224 (D)232

<解析>

$\frac{2x+3y}{2}\geq\sqrt{2x\cdot 3y}\rightarrow\sqrt{6xy}\leq\frac{72}{2}=36$，$6xy\leq 1296$，$xy\leq 216$

當 $2x=3y$，且 $2x+3y=72$ 成立，故 $x=18$，$y=12$，xy 的最大值=18×12=216，選 B。

5. 設 x 為實數，且 $y=|x-2|+|x+1|+|2x-3|$，則 y 的最小值為? (A)2 (B)3 (C)4 (D)5

<解析>

①$|x-2|+|x+1|=|2-x|+|x+1|\geq|(2-x)+(x+1)|=3$，等號成立條件為$-1\leq x\leq 2$

②$|2x-3|\geq 0$，當 $x=\frac{3}{2}$ 時，$|2x-3|=0$

故原式→ $y\geq 3$，最小值為 3，選 B。

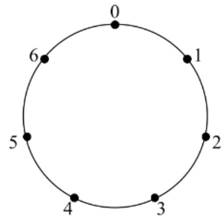
<另解>

$y=|x-2|+|x+1|+|2x-3|\rightarrow y=|x-2|+|x+1|+\left|x-\frac{3}{2}\right|+\left|x-\frac{3}{2}\right|$

-1、$\frac{3}{2}$、$\frac{3}{2}$、$2\rightarrow$ 中位數$(\frac{3}{2}+\frac{3}{2})\div 2=\frac{3}{2}$代入

➔y=3 是最小值

6. 如右圖，將圓分成七等分，並依序標示為 0~6，若將每一等分視為一個單位，並依照投擲一公正骰子所得的點數，由「0」出發依順時針方向前進"所得點數"個單位長，試求連擲兩次骰子後，恰停留在「5」的機率為何? (A) $\frac{5}{18}$ (B) $\frac{7}{18}$ (C) $\frac{5}{36}$ (D) $\frac{7}{36}$



<解析>

連擲兩次骰子所得的點數為(x, y)，當 $x+y=5$ 或 12

得(x, y)= (1, 4)、(2, 3)、(3, 2)、(1, 4)、(6, 6)，且(x, y)的全部結果有 $6\times6=36$ 種

故所求機率為 $\frac{5}{36}$ ，選 C。

7. 設 $a>0$，x 為實數，若$a^{2x}=3$，試求$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}$之值? (A) $\frac{7}{3}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{11}{2}$ (D) $\frac{11}{3}$

<解析>

$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}=\frac{(a^{3x}+a^{-3x})\times a^{x}}{(a^{x}+a^{-x})\times a^{x}}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}=\frac{3^2+\frac{1}{3}}{3+1}=\frac{7}{3}$，選 A。

8. 已知 a、b 為有理數，滿足$(a-\sqrt{3})^2=b+2\sqrt{3}$，則 $a\times b$=? (A)2 (B)-2 (C)4 (D)-4

<解析>

$a^2-2\sqrt{3}a+3=b+2\sqrt{3}$ ➔ $(a^2+3)-2a\sqrt{3}=b+2\sqrt{3}$

$\therefore -2a=2$ 且$a^2+3=b$

得 $a=-1$，$b=4$，故 $a\times b=-4$，選 D。

9. Which of the following options has a value closest to 10,000? (A) $10^{3.98}$ (B) $10^{3.99}$ (C) $10^{4.01}$ (D) $10^{4.02}$

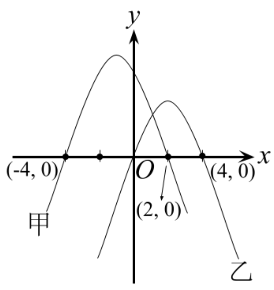
<解析>

①$|10^4-10^{3.99}|=|10^{3.99}(10^{0.01}-1)|$

②$|10^{4.01}-10^4|=|10^4(10^{0.01}-1)|$

故②>①，選 B。

10. 如圖，二次函數甲的圖形向右平移 n 個單位，再向下平移幾個單位後，得到新函數乙，其圖形交 x 軸於原點和(4, 0)兩點，則 n=? (A)$\frac{9}{2}$ (B)4 (C)$\frac{7}{2}$ (D)3



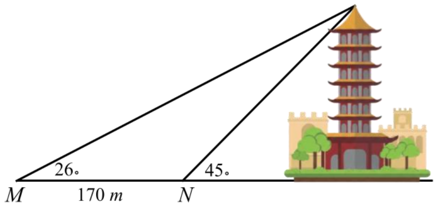
<解析>

甲對稱軸為 $x=\frac{-4+2}{2}=-1$，乙對稱軸為 $x=\frac{0+4}{2}=2$

故甲向右平移 2-(-1)=3，選 D。

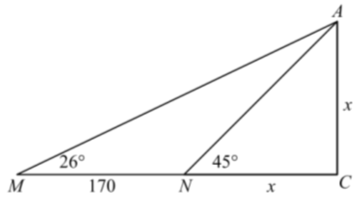
11. 一座塔直立地面，從地面 M 處測量塔頂得仰角 26°，若向塔前進 170 公尺至 N 處，再測得塔頂仰角為45°，求塔高是多少公尺? (設$\tan 26^{\circ} \fallingdotseq 0.49$)

(A) $160\frac{1}{3}$ (B) $161\frac{1}{6}$ (C) $162\frac{1}{6}$ (D) $163\frac{1}{3}$



<解析>

設高塔$\overline{AC}=x$ 公尺，$\overline{CN}=x$ 公尺



在直角三角形中，$\tan 26° = \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}} = \frac{x}{170+x} = 0.49$，$x=0.49(170+x)$，

$0.51x=83.3$，$x=\frac{83.3}{0.51}=\frac{8330}{51}=\frac{490}{3}=163\frac{1}{3}$，選 D。

12. 已知$[x]$表示不超過 x 的最大整數，若x_0是$x^{[x]}=8$的實數根，則________。

(A) $0<x_0<1$ (B) $1<x_0<2$ (C) $2<x_0<3$ (D) $3<x_0<4$

<解析>

令 $g(x)= x^{[x]}$，則 $g(x)$在$(0, +\infty)$上單調遞增

當$[x]=0$ 時，則 $0\le x<1$，$g(x)=1$

$[x]=1$ 時，則 $1\le x<2$，$1\le g(x)<2$

$[x]=2$ 時，則 $2\le x<3$，$4\le g(x)<9$

$[x]=3$ 時，則 $3\le x<4$，$27\le g(x)<64$，選 C。

13. 設 x 為整數，則滿足$|x-\frac{1}{2}|<\sqrt{7}$之 x 有________個。(A)5 (B)6 (C)7 (D)8

<解析>

$|x-\frac{1}{2}|<\sqrt{7} \rightarrow -\sqrt{7} < x-\frac{1}{2}<\sqrt{7}$

$\frac{1}{2}-\sqrt{7} < x <\sqrt{7}+\frac{1}{2}$，且$\sqrt{7}\fallingdotseq 2.63$

$\therefore 0.5-2.63 < x < 0.5+2.63$，$-2.13<x<3.13$，且$x\in z$

$\therefore x=-2$、-1、0、1、2、3，共有 6 個，選 B。

14. 設 $x=\sqrt{3}+1$，則$x^3-6x-1=?$ (A) 3 (B) $\sqrt{3}-1$ (C) 4 (D) $2\sqrt{3}-4$

<解析>

$x=\sqrt{3}+1 \rightarrow x-1=\sqrt{3}$，$x^2-2x+1=3$，$x^2-2x-2=0$

$(x^3-6x-1)=(x^2-2x-2)\cdot(x+2)+3$，$x^3-6x-1$之值為 3，選 A。

15. 在坐標平面，點 $M(p, q)$在直線 $x-y=1$ 上，則 $N(\frac{p}{p^2-q^2}, \frac{q}{p^2-q^2})$在下列哪一條直線上?

(A) $x+y=1$ (B) $x-y=1$ (C) $x+y=0$ (D) $x-y=0$

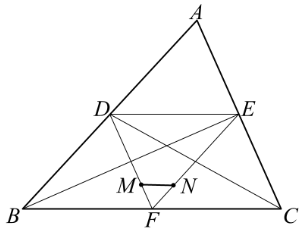
<解析>

①$M(p, q)$在 $x-y=1$ 上，$p-q=1$

②$N(\frac{p}{p^2-q^2}, \frac{q}{p^2-q^2})$代入 $x+y=1 \rightarrow \frac{p}{p^2-q^2}+\frac{q}{p^2-q^2}=1$，$\frac{p+q}{p^2-q^2}=1$

$\rightarrow \frac{p+q}{(p+q)(p-q)}=1$，$\frac{1}{(p-q)}=1$，$p-q=1$(合理)，選 A。

16. 如右圖，△ABC 中，D、E、F 分別為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$的中點，且 M、N 分別為△DBC、△EBC 的重心，若$\overline{BC}$=12，則$\overline{MN}$=? (A) 1　(B) $\frac{3}{2}$ (C) 2　(D) $\frac{5}{2}$



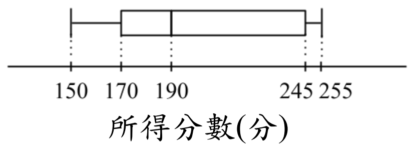
<解析>

∵D、E 分別為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$的中點

∴$\overline{DE}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}=6$，$\overline{FM}:\overline{DF}=1:3=\overline{FN}:\overline{FE}$➔$\overline{MN}//\overline{DE}$

∴$\overline{MN}:\overline{DE}=1:3$ →$\overline{MN}=2$，選 C。

17. 小芬與她的五位朋友參加保齡球比賽，右圖為她們六人所得分數的盒狀圖，若小芬所得到的分數恰為她們六人的平均分數，則小芬得到多少分? (A)198　(B)199　(C)200　(D)201



<解析>

設六人分數由小到大分別為a_1、a_2、a_3、a_4、⋯、a_6

則$a_1=150$，$a_6=255$，$6\times\frac{1}{4}=1.5$，則$Q_1=a_2=170$；$6\times\frac{3}{4}=4.5$，則$Q_3=a_5=245$

→$6\times\frac{2}{4}=3$，則$Q_2=\frac{a_3+a_4}{2}=190$，$a_3+a_4=380$

∴所求=$(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)\div6=(150+170+380+245+255)\div6=1200\div6=200$，選 C。

18. Let $y=f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-2026}$. Determine the range of y.

(A) $0<y\le\sqrt{2026}$ (B) $0\le y<\sqrt{2026}$ (C) $0<y\le2026$ (D) $0\le y<2026$

<解析>

①$x-2026\ge0$，$x\ge2026$

② $f(x)=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-2026})(\sqrt{x}+\sqrt{x-2026})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-2026})}=\frac{2026}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-2026})}$，當 $x=2026$ 時，y 有最大值$\frac{2026}{\sqrt{2026}}=\sqrt{2026}$

∴$0<y\le\sqrt{2026}$，選 A。

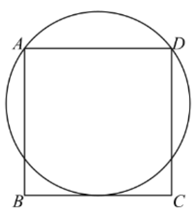
19. 設實數 x、y 滿足 $x+y=3$，求$y=f(x)=x^4+y^4$的最小值是多少? (A) $\frac{79}{8}$ (B) $\frac{81}{8}$ (C) $\frac{83}{8}$ (D) $\frac{85}{8}$

<解析>

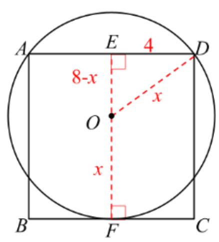
令 $y=3-x$，$y=f(x)=x^4+y^4=x^4+(3-x)^4$，令$t=x-\frac{3}{2}$，$x=\frac{3}{2}+t$，則 $3-x=\frac{3}{2}-t$，

∴$f(x)=(\frac{3}{2}+t)^4+(\frac{3}{2}-t)^4=2t^4+27t^2+\frac{81}{8}$，當 $t=0$，有最小值$\frac{81}{8}$，選 B。

20. 如右圖，正方形之邊長為 8，一個圓過 A、D 且與$\overline{BC}$相切，則此圓之半徑為多少? (A)4 (B)5 (C)6 (D)7



<解析>



①過 O 作$\overline{EF}\perp\overline{AD}$於 E、F

②令半徑=$x=\overline{OD}=\overline{DF}$➔$\overline{DE}=8-x$

③△ODE 中，$x^2=(8-x)^2+4^2$，$x=5$，選 B。

二、填充題(每題 12 分，共 60 分，請將答案填入答案表內)

1. 已知 x、y、z 有解，且 $x>y>z$ 都滿足三個方程式: $x^3+y^3+z^3=2547$、$x^2+y^2+z^2=257$、$x+y+z=27$，試求出數對(x, y, z)的值是__________。(全對才給分)

<解析>

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$，$27\times27=257+2(xy+yz+zx)$，$xy+yz+zx=236$

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$\therefore 2547=27\times(257-236)+3xyz$，$xyz=660$

得$t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0$，$t^3-27t^2+236t-660=0$

$\therefore (t-11)(t-6)(t-10)=0$，$t=6$、$10$、$11$

則 $x=11$，$y=10$，$z=6$，數對$(x, y, z)=(11, 10, 6)$

2. 已知 b 是 a、c 的等差中項，直線 $ax+by+c=0$ 與圓$x^2+y^2+6y-1=0$交於 A、B 兩點，則$\overline{AB}$的最小值為__________。

<解析>

$x^2+y^2+6y-1=0$，$x^2+(y+3)^2=1+9=10$，圓心$(0, -3)$，半徑$=\sqrt{10}$

則圓心到直線 $ax+by+c=0$ 的距離 $d=\dfrac{|-3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

則$|\overline{AB}|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{10-d^2}$，且要求$|\overline{AB}|$的最小值，即要求 d 的最大值

且 $2b=a+c$，則$d^2=\dfrac{(c-3b)^2}{a^2+b^2}=\dfrac{(2b-a-3b)^2}{a^2+b^2}=\dfrac{(-a-b)^2}{a^2+b^2}=\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$，令 $x=\dfrac{a}{b}$，$d^2=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}=1+\dfrac{2x}{x^2+1}$

當 $x=1$ 時，$d^2=1+\dfrac{2}{1+1}=2$，則$|AB|=2\sqrt{10-2}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$

3. Let x be a positive integer such that $\sqrt{1^3+2^3+3^3+\ldots+x^3}=1035$. Find the value of x.

<解析>

$1^3+2^3+3^3+\ldots+x^3=(1+2+3+\ldots+x)^2\rightarrow$ 故$\sqrt{(1+2+3+\ldots+x)^2}=1035$，

$\therefore 1+2+3+\ldots+x=1035$，$\dfrac{(1+x)x}{2}=1035$，$x(x+1)=2070 \rightarrow x=45$

4. 已知有 30 個 0、30 個 1、30 個 3 組成一個數列，若此數列前 45 項的和為 65，後 45 項的平方之和為 151，且前 45 項有 x 項為 0，則 $x=$__________。

<解析>

	0	1	3	合計
a_1-a_{45}前 45 項	x 個	a 個	b 個	45 個
a_{46}-a_{90}後 45 項	$(30-x)$個	$(30-a)$個	$(30-b)$個	45 個

$\begin{cases} a+3b=65 \\ 1^2(30-a)+3^2(30-b)=151 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+3b=65 \quad \ldots\ldots① \\ -a-9b=151-30-270=-149 \quad \ldots\ldots② \end{cases}$

$\therefore$①+②，$-6b=-84$，$b=14$，則 $a=23$

故 $x=45-23-14=8$

5. Let x and y be real numbers satisfying $(x-1)^3+2026(x-1)=-1$ and $(y-1)^3+2026(y-1)=1$. Find the value of $x+y$.

<解析>

$(x-1)^3+2026(x-1)+(y-1)^3+2026(y-1)=0$

令 $A=(x-1)$，$B=(y-1)$

原式$=A^3+B^3+2026(A+B)=0$

$(A+B)\left(A^2-AB+B^2\right)+2026(A+B)=0$

$(A+B)\left(A^2-AB+B^2+2026\right)=0$

得$(x+y-2)[(x-1)^2-(x-1)(y-1)+(y-1)^2+2026]=0$

$\therefore x+y-2=0$，$x+y=2$

三、計算題(第 1、2 題請寫出計算過程，每題 20 分，共 40 分)

1. 方程式: $2xy-4x^2+12x-5y=11$
   (1) 將 y 用 x 表示。 (8 分)
   (2) 求 x、y 的整數解(x, y)=? (12 分)

<解析>

(1) $2xy-4x^2+12x-5y=11$

$\rightarrow$ $2xy-5y=4x^2-12x+11$

$\rightarrow$ $y(2x-5)=4x^2-12x+11$

$\rightarrow$ $y=\frac{4x^2-12x+11}{2x-5}$

(2) $y=\frac{4x^2-12x+11}{2x-5}=2x-1+\frac{6}{2x-5}\in Z$➔$2x-5$ 是 6 的因數

$\therefore 2x-5=1$、2、3、6、-1、-2、-3、-6

x	3	4	2	1
y	11	9	-3	-1

$(x, y)=(3, 11)$、$(4, 9)$、$(2, -3)$、$(1, -1)$

2. 若 $1364+n$ 和 $1364-n$ 都是正整數的立方，試問:
   (1) 求 n 的值是多少? (14 分)
   (2) 分別是哪兩個正整數? (6 分)

<解析>

(1)令$1364+n=a^3$、$1364-n=b^3$

$1364\times2=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)[(a+b)^2-3ab]$

$\therefore 2728<(a+b)^3$，$a+b>13$，又 $2728=2^3\times11\times31$，$a+b=22$、31、44、....

若 $a+b=22$，$22^2-3a(22-a)=124$，$3a^2-66a+360=0$，$a^2-22a+120=0$

$\therefore (a-12)(a-10)=0$，$a=12$、10➔當 $a=12$，$b=10$ 或 $a=10$，$b=12$(不合)

$\therefore 1364+n=12^3$，$n=1728-1364=364$

(2)兩個正整數為 12 和 10