

第二十二屆 國際數學競賽台灣區初賽

22nd International Mathematics Contest (Taiwan)

國中一年級組

考生姓名		試題 總分	
准考證號碼			

※參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。

※計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

答案區

一、選擇題(每題 10 分，共 200 分)

題號	1	2	3	4	5
答案	D	A	C	A	B
題號	6	7	8	9	10
答案	C	A	D	C	A
題號	11	12	13	14	15
答案	A	D	B	C	D
題號	16	17	18	19	20
答案	B	C	A	C	C

二、填充題(每題 12 分，共 60 分)

題號	1	2	3	4	5
答案	19(送分)	12、13、14 (全對才給分)	78、42 (各給 6 分)	27	182

考試時間: 60 分鐘，卷面總分: 300 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

一、選擇題(每題 10 分，共 200 分，請將答案填入答案表內)

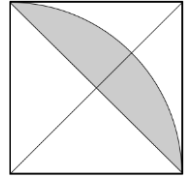
1. 求出右圖邊長 8 公分的正方形內，塗色部分的面積為多少平方公分?

(A)16.36 (B)18.12 (C)18.16 (D)18.24

<解析>

$$8 \times 8 \times 3.14 \times \frac{1}{4} = 50.24, \quad 8 \times 8 \times \frac{1}{2} = 32$$

$$50.24 - 32 = 18.24, \text{ 選 D。}$$



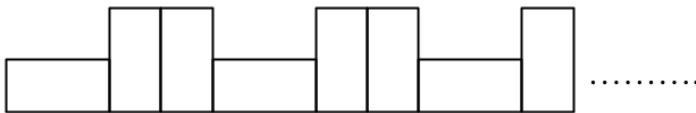
2. If $5674\square30$ is divided by 11 and the remainder is 2, then $\square = \underline{\hspace{1cm}}$. (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

$5674\square30 - 2 = 5674\square28$ 是 11 的被數

$$8 + \square + 7 + 5 = 2 + 4 + 6 + 11, \quad \square = 3, \text{ 選 A。}$$

3. 阿圓用大小相同的長方形磚塊長 25 公分、寬 15 公分，如圖所示，依橫放、直放、直放、橫放……的規律排列，請問要用多少塊磚，才能排出總長度 1580 公分的磚塊? (A)84 (B)85 (C)86 (D)88



<解析>

$$1580 \div (25 + 15 + 15) = 28 \dots 40$$

$$40 = 25 + 15$$

$$28 \times 3 + 2 = 86, \text{ 選 C。}$$

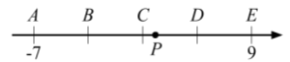
4. 甲、乙、丙、丁 4 人集資 100 萬開店，乙出資全部的 $\frac{2}{5}$ ，甲出的資金是乙的 $\frac{3}{4}$ ，丙出的資金是甲的 $\frac{2}{3}$ ，剩下的由丁出，則丁出的資金為多少元? (A)10 萬 (B)12 萬 (C)15 萬 (D)18 萬

<解析>

$$\text{乙出 } \frac{2}{5}, \quad \text{甲出 } \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}, \quad \text{丙出 } \frac{3}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$$

$$\text{故丁出 } (1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{10} - \frac{1}{5}) \times 100 \text{ 萬} = \frac{10 - 4 - 3 - 2}{10} \times 100 \text{ 萬} = 10 \text{ 萬}, \text{ 選 A。}$$

5. 如右圖， A 、 B 、 C 、 D 為數線上五個點，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$ ，則 P 點坐標較接近下列哪一個數? (A)-1 (B)1 (C)4 (D)5



<解析>

$$9 - (-7) = 16, \quad 16 \div 4 = 4 \rightarrow B(-3)、C(1)、D(5), \quad P \text{ 點接近 } C \text{ 點}, \text{ 選 B。}$$

6. 計算 $\frac{318^4}{159^4} + \frac{1407^3}{469^3} - \frac{4408^2}{1102^2} = ?$ (A)18 (B)-18 (C)27 (D)-27

<解析>

$$\text{原式} = \left(\frac{318}{159}\right)^4 + \left(\frac{1407}{469}\right)^3 - \left(\frac{4408}{1102}\right)^2 = 2^4 + 3^3 - 4^2 = 16 + 27 - 16 = 27, \text{ 選 C。}$$

7. 將 $\frac{1}{15}$ 、 $\frac{2}{15}$ 、 $\frac{3}{15}$ 、 $\frac{4}{15}$ 、 $\frac{5}{15}$ 、……、 $\frac{297}{15}$ 、 $\frac{298}{15}$ 、 $\frac{299}{15}$ 、 $\frac{300}{15}$ 約分後，會成為分母為5的最簡分數共有多少個？(A)80 (B)81 (C)99 (D)100

<解析>

分子為3的倍數，但不是15的倍數，則可約成分母是5的最簡分數
 $300 \div 3 = 100$ ， $300 \div 15 = 20$ ， $100 - 20 = 80$ ，選A。

8. 將四個分數 $\frac{8}{7}$ 、 $\frac{7}{8}$ 、 $\frac{9}{8}$ 、 $\frac{8}{9}$ 做比較，則最接近1的是？(A) $\frac{8}{7}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) $\frac{9}{8}$ (D) $\frac{8}{9}$

<解析>

$$\frac{8}{7} = 1 + \frac{1}{7}, \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}, \frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}, \frac{8}{9} = 1 - \frac{1}{9}$$

$\therefore \frac{1}{7} > \frac{1}{8} > \frac{1}{9}$ $\therefore \frac{8}{9}$ 較接近1，選D。

9. a 是一個正整數，其所有正因數有1、2、4、7、14、28，則 a 與210的最大公因數為多少？(A)4 (B)7 (C)14 (D)28

<解析>

$a = 1 \times 28 = 28$ ， $(28, 210) = 2 \times 7 = 14$ ，選C。

10. 右圖數線上的 O 是原點， A 、 B 、 C 三點所表示的數分別為 a 、 b 、 c ，根據圖中各點的位置，下列各數的絕對值的比較何者正確？(A) $|b| < |c|$ (B) $|b| > |c|$ (C) $|a| < |b|$ (D) $|a| > |c|$



<解析>

$$\therefore \overline{OB} > \overline{OA} > \overline{OC}$$

$\therefore |b| < |a| < |c| \rightarrow |b| < |c|$ ，選A。

11. A road is x kilometers long. Angela walks from east to west at a speed of 85 meters per minute, and Paul walks from west to east at a speed of 100 meters per minute. They meet after 15 minutes. Find the length of the road in kilometers. (A)2.775 (B)2.83 (C)2.96 (D)3.15

<解析>

$(100+85) \times 15 = 2775$ 公尺 = 2.775 公里，選A。

12. 計算 $536 \times 52 - 364 \times 48 + 364 \times 52 - 536 \times 48 =$ _____。 (A)3000 (B)3200 (C)4000 (D)3600

<解析>

$$\text{原式} = 536 \times 52 - 536 \times 48 + 364 \times 52 - 364 \times 48$$

$$= 536 \times (52 - 48) + 364 \times (52 - 48) = 536 \times 4 + 364 \times 4 = (536 + 364) \times 4 = 900 \times 4 = 3600$$
，選D。

13. 品言畫了一張百數表，她先把百數表上2的倍數都劃掉，再把3的倍數都劃掉，再把4的倍數都劃掉，之後再依序把5到60的倍數也都劃掉，請問百數表中還有多少個數字沒有被劃掉？(A)8 (B)9 (C)10 (D)11

<解析>

去掉2、3、4、5、……、60的倍數，剩下1和61~100之間的質數有61、67、71、73、79、83、89、97，共9個，選B。

14. 仁義國小學生中，男、女生人數相等，且全校學生中有 $\frac{2}{3}$ 視力正常，視力正常者有 $\frac{2}{5}$ 是男生，問女生視力不正常占全校的幾分之幾？(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{12}$

<解析>

男、女生各占 $\frac{1}{2}$ ，男生視力正常占 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ ，男生視力不正常 $=\frac{1}{2} - \frac{4}{15} = \frac{7}{30}$

故女生視力不正常占 $\frac{1}{3} - \frac{7}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ ，選 C。

15. 甲、乙兩人按順針方向沿 3600 公尺的圓形跑道練習跑步，已知甲跑一圈要 30 分鐘，乙跑一圈要 45 分鐘，如果他們分別從圓形跑道直徑的兩端同時出發，那麼出發後多少分鐘甲追上乙？(A)32 (B)36 (C)40 (D)45

<解析>

甲速度： $3600 \div 30 = 120$ (公尺/分)

乙速度： $3600 \div 45 = 80$ (公尺/分)

$3600 \div 2 = 1800$

$1800 \div (120 - 80) = 45$ 分鐘，選 D。

16. 某城市的地下水位隨季節而改變(以米為單位，水位低於地面為負數，高於地面為正數)：①春季：水位 $-2.5 m$ ②夏季：水位上升 $4.3 m$ ③秋季：水位下降 $3.8 m$ ④冬季：水位再上升 $1.2 m$ ，請問全年水位變化的總幅度是多少(最高水位-最低水位)？(A) $4.2 m$ (B) $4.3 m$ (C) $4.4 m$ (D) $4.5 m$

<解析>

春季為 $-2.5 m$ ，夏季為 $-2.5 + 4.3 = 1.8 m$ ，秋季為 $1.8 - 3.8 = -2 m$ ，冬季為 $-2 + 1.2 = -0.8 m$

故總幅度為 $1.8 - (-2.5) = 4.3 m$ ，選 B。

17. 地球到月球的平均距離為 3.84×10^5 公里，光速約為每秒 3.0×10^5 公里，如果光往返地球和月球一次，所需時間是多少秒？(A)2.52 (B)2.54 (C)2.56 (D)2.58

<解析>

$3.84 \times 10^5 \times 2 = 7.68 \times 10^5$ ，故所需時間為 $\frac{7.68 \times 10^5}{3.0 \times 10^5} = 2.56$ ，選 C。

18. 數線上甲、乙分別站在 -13 和 7 的位置，甲以每秒 3.5 個單位長及乙以每秒 6 個單位長的速度均往左移動，則乙追到甲時，他們位置的代表數為多少？(A) -41 (B) -42 (C) -43 (D) -44

<解析>

$7 - (-13) = 20$ ， $20 \div (6 - 3.5) = 8$

相遇位置為 $-13 - 3.5 \times 8 = -13 - 28 = -41$ ，選 A。

19. How many digits does the number 987654^2 have? (A)10 (B)11 (C)12 (D)13

<解析>

$990000^2 = 960400000000 \rightarrow 12$ 位數

$980000^2 = 980100000000 \rightarrow 12$ 位數

$\therefore 987654^2$ 是 12 位數，選 C。

20. 一個長方形的長比寬多 4 公分，如果將長增加 2 公分，寬減少 1 公分，長方形面積剛好增加 14 平方公分，求原本長方形的寬是多少公分？(A)18 (B)19 (C)20 (D)21

<解析>

令寬= a ，長= $4+a$ ，原面積= $(4+a)\times a=4a+a^2$
後來長= $6+a$ ，寬= $a-1$ ，新面積= $(a-1)(6+a)=6a-6+a^2-a$
 $6a-6+a^2-a-(4a+a^2)=14$ ， $6a-6-5a=14$ ， $a=20$ ，選 C。

二、填充題(每題 12 分，共 60 分，請將答案填入答案表內)

1. There are 30 students in a class, and the average score of their math exam is 72.3. The highest score is a , and the second highest score is b . The average score of the other 28 students is 71. If the maximum possible score on the exam is 100, find the value of $a-b$.

<解析>

$72.3\times 30=2169$ ， $71\times 28=1988$ ， $2169-1988=181$
故 $a+b=181$ 且 a 、 b 為最高分及次高分
 $181=100+81$ ，故 $a=100$ ， $b=81$ ，則 $a-b=100-81=19$

<解析異動>

$181=100+81=99+82=98+83=97+84=96+85=95+86=94+87=93+88=92+89=91+90$
故 $a-b=100-81=19$ 、 $99-82=17$ 、 $98-83=15$ 、 $97-84=13$ 、 $96-85=11$ 、 $95-86=9$ 、 $94-87=7$ 、 $93-88=5$ 、 $92-89=3$ 、 $91-90=1$
故 $a-b=19$ 、 17 、 15 、 13 、 11 、 9 、 7 、 5 、 3 、 1 。(送分)

2. 有三個連續正整數，它們的和加上它們的乘積等於 2223。求這三個數。

<解析>

$a-1$ 、 a 、 $a+1$ ，和= $(a-1)+a+(a+1)=3a$
 $3a+(a-1)\times a\times (a+1)=2223$ ， $3a+a(a^2-1)=2223$ ， $a^3+2a=2223$
 $\rightarrow a(a^2+2)=2223=13\times 171=13\times(13^2+2)$
當 $a=13$ ， $2197+26=2223$ ，故此三數為 12、13、14

3. The least common multiple (LCM) of four positive integers a, b, c, d is 360, and their greatest common divisor (GCD) is 6. If $a+b=36$, then $c+d=$ _____.

<解析>

設 $a=6x$ 、 $b=6y$ 、 $c=6z$ 、 $d=6m$ ， $6x+6y=36$ ， $x+y=6$
 $360\div 6=60$ ， $x\times y\times z\times m=60$ ， $60=2\times 2\times 3\times 5\rightarrow (x, y)=(1, 5)(5, 1)$ ， $xy=5$
得 $z\times m=12$ 且 z 、 m 互質 $\rightarrow (z, m)=(1, 12)$ 、 $(3, 4)$ 、 $(4, 3)$
故 $c+d=6z+6m=6(z+m)=6(1+12)=78$ 或 $6(4+3)=42$

4. 投擲 3 顆大、中、小的公正骰子，點數和為 10，共有_____種方法。

<解析>

$10=1+3+6\rightarrow 6$ 種； $10=1+4+5\rightarrow 6$ 種； $10=2+2+6\rightarrow 3$ 種； $10=2+3+5\rightarrow 6$ 種
 $10=2+4+4\rightarrow 3$ 種； $10=3+3+4\rightarrow 3$ 種，共有 $6\times 3+3\times 3=18+9=27$ 種

5. 已知有 10 個正整數，它們的總和為 2002。這 10 個正整數的最大公因數可能的最大值是_____。

<解析>

$$2002=2 \times 7 \times 11 \times 13=(2 \times 7 \times 13) \times 11=182 \times 11=182 \times (1+1+1+\dots+1+2) \\ =182+182+182+\dots+182+182 \times 2 \rightarrow \text{最大公因數}=182(\text{最大})$$

三、計算題(第 1、2 題請寫出計算過程，每題 20 分，共 40 分)

1. 班上要舉辦同學會，全班人數(包含導師)共 30 人，決定每人紅茶 1 包、巧克力 1 包，各買 30 包，相同的東西要在同一家購買，三家商店促銷方式如下：

品項 商店	紅茶	巧克力
A 商店	1 包 20 元，買 20 包以上打九折	1 包 30 元，買五送一
B 商店	1 包 20 元，買 8 包裝 130 元	1 包 30 元，買七送二
C 商店	1 包 20 元，買 12 包裝 200 元	1 包 30 元，買九送四

- 請問：(1)紅茶在哪一家買最划算?(7 分)
(2)巧克力在哪一家買最划算?(7 分)
(3)班上同樂會最少花費多少元?(6 分)

<解析>

(1) A 商店: $20 \times 30 \times 0.9=540$; B 商店: $8 \times 3+6=30$, $3 \times 130+6 \times 20=390+120=510$
C 商店: $12 \times 2+6=30$, $200 \times 2+20 \times 6=400+120=520$, 選 B 商店划算

(2) A 商店: $(5+1) \times 5=30$, $30 \times 5 \times 5=750$; B 商店: $(7+2) \times 3+3=30$, $30 \times 7 \times 3+30 \times 3=720$
C 商店: $(9+4) \times 2+4=30$, $30 \times 9 \times 2+4 \times 30=660$, 選 C 商店划算

(3)最少花費為 $510+660=1170$ 元

2. 已知一個四位數 N (大於 2000，小於 3000)，滿足以下條件：

- ① N 被 3 除，餘 a ② N 被 5 除，餘 b ③ N 被 7 除，餘 c 且 $a+b+c=5$ 、 $abc \neq 0$
求這個四位數 N 可能為多少?(1 個給 8 分，2 個給 14 分，3 個給 20 分)

<解析>

$$[3, 5, 7]=105, 105 \times 28=2940 \text{ 且 } a+b+c=5$$

考慮餘數必小於除數 $\rightarrow a=1, 2, b=1, 2, 3, 4, c=1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$(a, b, c)=(1, 1, 3), (1, 3, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)$$

① $(a, b, c)=(1, 1, 3)$, N 除以 3、5 餘 1 $\rightarrow 1, 16, 31(31 \div 7=4 \dots 3)$

故 $N=2940+31=2971$

② $(a, b, c)=(1, 3, 1)$, N 除以 3、7 餘 1 $\rightarrow 1, 22, 43(43 \div 5=8 \dots 3)$

故 $N=2940+43=2983$

③ $(a, b, c)=(2, 2, 1)$, N 除以 3、5 餘 2 $\rightarrow 2, 17, 32, 47, \dots$ 除以 7 餘 2、3、4、5、6
不會有 1，所以沒有解。

④ $(a, b, c)=(2, 1, 2)$, 同上，不存在。

⑤ $(a, b, c)=(1, 2, 2)$, N 除以 5、7 餘 2 $\rightarrow 2, 37(37 \div 3=12 \dots 1)$

故 $N=2940+37=2977$

故 $N=2977$ 、 2983 、 2971

<解析異動>

$$N=[3, 5, 7]P+K$$

$(a, b, c)=(1, 1, 3)$ 符合條件 $K=31$

$=(1, 2, 2)$ 符合條件 $K=37$

$=(1, 3, 1)$ 符合條件 $K=43$

$=(2, 1, 2)$ 符合條件 $K=86$

$=(2, 2, 1)$ 符合條件 $K=92$

① $P=19$ ， $105 \times 19=1995$ ， $1995+(31, 37, 43, 86, 92)=2026, 2032, 2038, 2081, 2087$

② $P=20$ ， $105 \times 20=2100$ ， $2100+(31, 37, 43, 86, 92)=2131, 2137, 2143, 2186, 2192$

③ $P=21$ ， $105 \times 21=2205$ ， $2205+(31, 37, 43, 86, 92)=2236, 2242, 2248, 2291, 2297$

④ $P=22$ ， $105 \times 22=2310$ ， $2310+(31, 37, 43, 86, 92)=2341, 2347, 2353, 2396, 2402$

⑤ $P=23$ ， $105 \times 23=2415$ ， $2415+(31, 37, 43, 86, 92)=2446, 2452, 2458, 2501, 2507$

⑥ $P=24$ ， $105 \times 24=2520$ ， $2520+(31, 37, 43, 86, 92)=2551, 2557, 2563, 2606, 2612$

⑦ $P=25$ ， $105 \times 25=2625$ ， $2625+(31, 37, 43, 86, 92)=2656, 2662, 2668, 2711, 2717$

⑧ $P=26$ ， $105 \times 26=2730$ ， $2730+(31, 37, 43, 86, 92)=2761, 2767, 2773, 2816, 2822$

⑨ $P=27$ ， $105 \times 27=2835$ ， $2835+(31, 37, 43, 86, 92)=2866, 2872, 2878, 2921, 2927$

⑩ $P=28$ ， $105 \times 28=2940$ ， $2940+(31, 37, 43)=2971, 2977, 2983$

N 值如上，任選三個即可。(1 個給 8 分，2 個給 14 分，3 個給 20 分)