第二十二屆 IMC 國際數學競賽台灣區初賽

22nd International Mathematics Contest (Taiwan)

高中二年級組

考生姓名		試題總分	
准考證號碼			

※參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。

※計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

答案區

一、選擇題(每題 10 分，共 200 分)

題號	1	2	3	4	5
答案	A	B	C	A	D
題號	6	7	8	9	10
答案	D	C	A	A	D
題號	11	12	13	14	15
答案	A	B	B	C	D
題號	16	17	18	19	20
答案	B	A	C	D	B

二、填充題(每題 12 分，共 60 分)

題號	1	2	3	4	5
答案	123	$x+2y=7$	$a=5$、$b=12$、$c=13$	2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

考試時間: 60 分鐘，卷面總分:300 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

一、選擇題(每題 10 分，共 200 分，請將答案填入答案表內)

1. $\sin 630°+\cos 720°+\sin 810°+\cos 900°$之值為______。

(A) 0　(B) 1　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

<解析>

$\sin 630°+\cos 720°+\sin 810°+\cos 900°$

$=\sin(360°+270°)+\cos(360°+360°)+\sin(720°+90°)+\cos(720°+180°)$

$=(-1)+1+1+(-1)=0$，選 A。

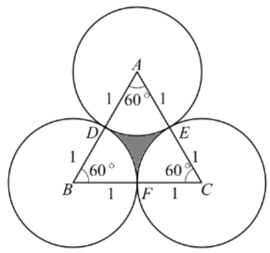
2. x、y 滿足 L: $3x+4y=1$，則$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$之最小值為______。

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\sqrt{5}$

<解析>

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$表示 $P(x, y)$到$(1, 2)$之距離，且 P 在 L: $3x+4y=1$ 上

故最小值$=\left|\frac{3\times1+4\times2-1}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\frac{10}{5}=2$，選 B。



3. 如圖，半徑為 1 之三圓互相外切，則陰影區域面積為______。

(A) $\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ (C) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$ (D) $\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}$

<解析>

所求面積=正$\triangle ABC$-3 個 60 度的扇形$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2-3\times1^2\times\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$，選 C。

4. It is known that the graph of the linear function $f(x)$ passes through two points (-1, 4) and (17, -5). Then $\frac{f(-2025)-f(2026)}{-2025-2026}=$? (A) $-\frac{1}{2}$ (B) -2 (C) -1 (D) $-\frac{2}{3}$

<解析>

直線上任兩點的斜率不變

斜率$=\frac{f(-2025)-f(2026)}{-2025-2026}=\frac{4-(-5)}{-1-17}=-\frac{1}{2}$，選 A。

5. 化簡$\sqrt{9-2\sqrt{14}}=$? (A) $3-\sqrt{5}$ (B) $3+\sqrt{7}$ (C) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$

<解析>

$\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{(7+2)-2\sqrt{7\times2}}=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2}=|\sqrt{7}-\sqrt{2}|=\sqrt{7}-\sqrt{2}$，選 D。

6. 在$\triangle ABC$ 中，當$\angle A=60°$，$\overline{AB}=x$，$\overline{BC}=2\sqrt{7}$以及$\overline{CA}=4$，求 $x=$?

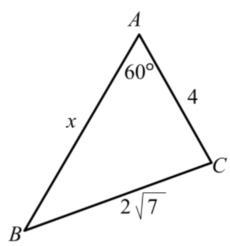
(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

<解析>

利用餘弦定理，$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos 60°$

$(2\sqrt{7})^2=x^2+4^2-2\times4\times x\times\frac{1}{2}$，$28=x^2+16-4x$，$x^2-4x-12=0$

$\therefore(x-6)(x+2)=0$，$x=6$ (取正數)，選 D。



7. $\sin^2 37.5°-\sin^2 7.5°=$______。 (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$

<解析>

利用三角恆等式 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

$\sin^2 37.5°-\sin^2 7.5°=\sin(37.5°+7.5°)\sin(37.5°-7.5°)=\sin 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，選 C。

8. 設 x 為實數，關於$y=f(x)=\cos x+|\cos x|$的圖形，則下列正確的有哪些?

①$f(x)$的週期是2π ② $f(x)$的週期是π ③ $f(x)$的最大值為 2 ④ $f(x)$的最小值為-2 ⑤$f(2)=0$

(A) ①、③、⑤ (B) ①、②、⑤ (C) ①、③、④ (D) ①、②、④

<解析>

(1)若$\cos x\geq 0$，則$f(x)=\cos x+\cos x=2\cos x$；(2)$\cos x<0$，則$f(x)=\cos x-\cos x=0$，

$\cos x$的週期是2π →①正確 ②錯誤

當 $\cos x=1$ 時，$f(x)=2\cos x=2$，故最大值為 2→③正確 ④最小值 0

當 $x=2$，$f(2)=\cos 2+|\cos 2|$，且 $\cos 2<0$ (2 徑$\approx 2\times 57.3°=114.6°$)

$\therefore f(2)=\cos 2+|\cos 2|=\cos 2-\cos 2=0$→⑤正確，選 A。

9. $y=f(x)=\sqrt{2}\sin x+\cos x-5$，$x\in R$，$y$ 有最大值 M 與最小值 m，則 $M+m=$______。

(A)-10 (B)-11 (C)-12 (D)-13

<解析>

$y=2(\sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\frac{1}{2})-5=2(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{6})-5=2\sin(x+\frac{\pi}{6})-5$

$\therefore M=2\times 1-5=-3$，$m=2\times(-1)-5=-7$，故 $M+m=(-3)+(-7)=-10$，選 A。

10. 設$0°\leq\theta<360°$，且方程式$x^2-a=0$之兩解恰為$\sin\theta$與$\cos\theta$，下列何者錯誤?

(A) $\sin(\theta+45°)=0$ (B) $\sin 2\theta=-1$ (C) $a=\frac{1}{2}$ (D) $\tan\theta=1$

<解析>

$x^2=a$ → $x=\pm\sqrt{a}$，$\sin\theta=-\cos\theta$ 即$\sin\theta+\cos\theta=0$

(A) $\sin(\theta+45°)=\sin\theta\cos 45°+\cos\theta\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)=0$ →正確

(B) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=0$，$1+2\cdot\sin\theta\cos\theta=0$，$2\cdot\sin\theta\cos\theta=-1$，$\sin 2\theta=-1$ →正確

(C) $\sin\theta\cos\theta=\sqrt{a}\cdot(-\sqrt{a})=-a$，$2\sin\theta\cos\theta=-2a=-1$，$a=\frac{1}{2}$ →正確

(D) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\cos\theta}{\cos\theta}=-1$ →錯誤，選 D。

11. If a, b are real numbers and the inequality $|x-a|<b$ has the solution set $-1<x<7$, then find $a\times b$. (A)12 (B)14 (C)16 (D)18

<解析>

$(-1+7)\div 2=3$

$-1-3<x-3<7-3$，$-4<x-3<4$，$|x-3|<4$

$\therefore a=3$，$b=4$，則 $a\times b=3\times 4=12$，選 A。

12. $f(x)=x^{90}+ax^{13}+2x-1$除以$x+1$的餘式為 5，則 $a=$_____。

(A)7 (B)-7 (C)6 (D)-6

<解析>

令 $x=-1$，$f(-1)=(-1)^{90}+a\cdot(-1)^{13}+2\times(-1)-1=5$

$\therefore 1-a-2-1=5$，$a=-2-5=-7$，選 B。

13. 點 $A(7, 1)$且 P 為圓 C: $(x-3)^2+(y-4)^2=4$上的一動點，則$\overline{PA}$的最小值為_____。

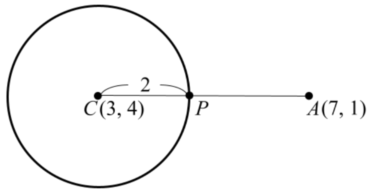
(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

<解析>

圓心(3, 4)，$r=2$

$\therefore \overline{CA}=\sqrt{(7-3)^2+(1-4)^2}=5$

故$\overline{PA}$的最小值$=\overline{CA}-\overline{CP}=5-2=3$，選 B。

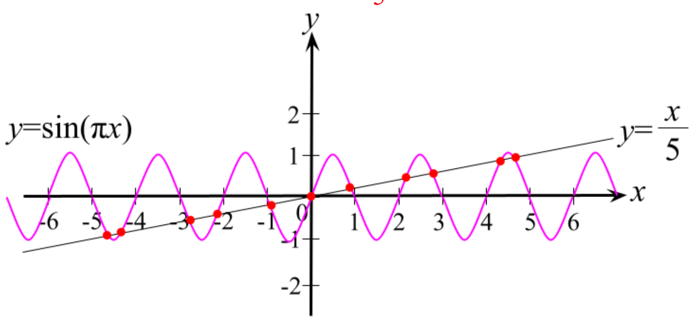


14. 方程式$5\sin(\pi x)=x$的實數解有_____個。

(A)9 (B)10 (C)11 (D)12

<解析>

$5\sin(\pi x)=x \rightarrow \sin(\pi x)=\frac{x}{5}$，作 $y=\sin(\pi x)$週期$=\frac{2\pi}{\pi}=2$，與 $y=\frac{x}{5}$ 的圖形



由上圖可知有 11 個交點，選 C。

15. Triangle ABC is an equilateral (等腰) triangle with side length 5. Point P lies inside the triangle. If $\overline{PB}=4$ and $\overline{PC}=3$, find $\cos\angle ABP$. (A) $\frac{6+2\sqrt{3}}{10}$ (B) $\frac{5+2\sqrt{3}}{10}$ (C) $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ (D) $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

<解析>

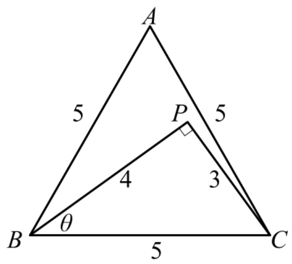
令$\angle PBC=\theta$

可知$\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\frac{4}{5}$

$\therefore \cos\angle ABP=\cos(60°-\theta)$

$=\cos 60°\cos\theta+\sin 60°\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$，選 D。



16. 由數字 1~9 共 9 個數字，任取三個相異數字為一組，其和為奇數者共有幾組?
(A)30 (B)40 (C)50 (D)60

<解析>

奇數: 1、3、5、7、9，偶數: 2、4、6、8

其和為奇數表示三數為三奇、一奇二偶

∴共有$C_3^5+C_1^5C_2^4=10+30=40$ 組，選 B。

17. 在數列 1、$\frac{1}{2}$、1、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、1、$\frac{1}{4}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{4}$、1、$\frac{1}{5}$、……中，$\frac{54}{107}$是數列的第______項。(A)5725 (B)5724 (C)5723 (D)5722

<解析>

(1)、$(\frac{1}{2}$、$\frac{2}{2})$、$(\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{3})$、$(\frac{1}{4}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{4}{4})$、…..

第 1 組　第 2 組　第 3 組　第 4 組

$\frac{54}{107}$ 表示第 107 組中第 54 個數

故前 106 組共有 $1+2+3+\ldots+106=\frac{(1+106)}{2}\times106=5671$ 個數

∴$\frac{54}{107}$為第 $5671+54=5725$ 項，選 A。

18. 某電影院第一排共有 9 個座位，現有 3 名觀眾就座，試問他們三人分坐於 9 個連座中，任兩人不相鄰，且對每位就座者，到其左（右）最近的另一位就座者或座位邊界之間的空位數均不超過 2 的機率是? (A)$\frac{8}{21}$ (B)$\frac{4}{21}$ (C)$\frac{2}{21}$ (D)$\frac{1}{7}$

<解析>

①保留 2 個空位: △、△、A、△、△、B、△、△、C → $3!\times\frac{3!}{3!}=6$

②保留 2 個空位: A、△、△、B、△、△、C、△、△→ $3!\times\frac{3!}{3!}=6$

③保留 1、2 個空位: △、A、△、B、△、△、C、△、△ → $3!\times\frac{4!}{2!2!}=36$

故所求機率為$=\frac{6+6+36}{9\times8\times7}=\frac{2}{21}$，選 C。

19. 設$a=2^{26}$，$b=3^{16}$，已知$\log a=7.8260$，$\log b=7.6336$，則 ab 是幾位數?
(A)13 (B)14 (C)15 (D)16

<解析>

∵$\log a=7.8260$，$\log b=7.6336$

∴a、b 都是 8 位數

則$\log ab=\log a+\log b=7.8260+7.6336=15.4596$ ∴ab為 16 位數，選 D。

20. $f(x)=2x^3+12x^2-5x+1$圖形的對稱中心是______。
(A) (2, 43)　(B) (-2, 43)　(C) (3, 43)　(D) (-3, 43)

<解析>

$x=-\frac{b}{3a}=\frac{12}{6}=-2$ → $y=f(-2)=2\times(-2)^3+12(-2)^2-5(-2)+1=-16+48+10+1=43$

故對稱中心為(-2, 43)，選 B。

二、填充題(每題 12 分，共 60 分，請將答案填入答案表內)

1. 若α、β為x^2-3x+1=0兩根，則$\alpha^5+\beta^5$=_____ 。

<解析>

①$\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=1\end{cases}$

②$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7$，$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=27-3\times1\times3=18$

⑤$\alpha^5+\beta^5=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^3-\alpha^3\beta^2=7\times18-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)=126-1\times3=123$

2. 有一條直線 $2x+y=8$，以直線 $x-y=1$ 為對稱軸作對稱，得到另一條直線 $ax+by=m$。若兩條直線交於直線 $x-y=1$ 上的點，求對稱後的直線方程式是 _____ 。

<解析>

$2x+y=8$，$y=8-2x$，$x-(8-2x)=1$，$x-8+2x=1$，$3x=9$，$x=3$，$y=2$

交點坐標(3, 2)

找一點(4, 0)之對稱點為(1, 3)，斜率$=\frac{3-2}{1-3}=-\frac{1}{2}$

利用點斜式: $y-2=-\frac{1}{2}(x-3)$，$-2y+4=x-3$，$x+2y=7$

3. 在△ABC 中，a、b、c 分別為三個內角 A、B、C 對應的三邊，若 $c>b>a$，且符合 $a+b+c=30$，$3a^2+2b^2-2c^2=25$，△ABC 的面積為 30，求 a、b、c 的值各是多少？ a=_____ ，b=_____ ，c=_____ 。(每小格 4 分)

<解析>

$s=\frac{a+b+c}{2}=15$，$\sqrt{15(15-a)(15-b)(15-c)}=30$，$15(15-a)(15-b)(15-c)=900$

$(15-a)(15-b)(15-c)=60=1\times6\times10=2\times3\times10=3\times4\times5$

①$c=14$，$b=9$，$a=5$，$75+162-392\neq25$

②$c=13$，$b=12$，$a=5$，$75+288-338=25$

③$c=12$，$b=11$，$a=10$，$300+242-288\neq25$，故 $a=5$，$b=12$，$c=13$

4. Let $f(x)=a\cdot\sin^3x+b\cdot\sqrt[3]{x}+3$, where a, b are real numbers. Given that $f(\log(\log_4 10))=4$, find $f(\log(\log4))$.

<解析>

①令$\log(\log_4 10)=m \rightarrow \log(\log_{10}4)=-m$

② $f(m)=a\cdot\sin^3m+b\cdot\sqrt[3]{m}+3=4 \rightarrow a\cdot\sin^3m+b\cdot\sqrt[3]{m}=1$

③令 $g(x)=a\cdot\sin^3x+b\cdot\sqrt[3]{x} \rightarrow g(x)$為奇函數

$g(m)=a\cdot\sin^3m+b\cdot\sqrt[3]{m}=1 \rightarrow g(-m)=-a\cdot\sin^3m-b\cdot\sqrt[3]{m}=-1$

④ $f(-m)=-a\cdot\sin^3m-b\cdot\sqrt[3]{m}+3=-1+3=2$

5. Given that A and B are acute angles satisfying $\tan A\cdot\tan B=\tan A+\tan B+1$, find $\cos(A+B)$.

<解析>

$\because$ $\tan A\cdot\tan B=\tan A+\tan B+1$

$\therefore \dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}+1 \rightarrow \dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}$

等式同乘$\cos A\cos B$，得$\sin A\cdot\sin B=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B+\cos A\cdot\cos B$

$\therefore 0=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B+\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B$

$\therefore \sin(A+B)+\cos(A+B)=0$ 且 A、$B\in(0,\frac{\pi}{2}) \rightarrow 0\le A+B\le\pi$

$\therefore A+B=\frac{3\pi}{4}$，$\cos(A+B)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

三、計算題(第 1、2 題請寫出計算過程，每題 20 分，共 40 分)

1. (1) $y=-3x^2+4x$，且$0\le x\le 1$，若 y 的最大值 M，最小值 m，則 $M+m=?$ (8 分)

(2) 若$-1\le x\le 0$，$y=2^{x+2}-3\cdot 4^x$，若 y 的最大值 N，最小值 n，則 $N+n=?$ (12 分)

<解析>

(1) $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{-6}=\frac{2}{3}$ (在$0\le x\le 1$)，$y=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{16}{-12}=\frac{4}{3}$

x	0	$\frac{2}{3}$	1
y	0	$\frac{4}{3}$	1

$\therefore M=\frac{4}{3}$，$m=0$，則 $M+m=\frac{4}{3}+0=\frac{4}{3}$

(2)令 $a=2^x$，$y=4a-3a^2=-3(a-\frac{2}{3})^2+\frac{4}{3}$ 且$-1\le x\le 0\rightarrow 2^{-1}\le a\le 2^0$，$\frac{1}{2}\le a\le 1$

$\because a=\frac{2}{3}$ (在$\frac{1}{2}\le a\le 1$)

a	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
y	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	1

$\therefore N=\frac{4}{3}$，$n=1$，則 $N+n=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$

2. 設 n 為自然數，定義 n 的廣積數為 n 的各個非零的位值之乘積，例如: 123 的廣積數=$1\times2\times3=6$；7 的廣積數=7；302 的廣積數=$3\times2=6$。求:

(1) 1、2、3、4、5、6、7、8、9 所有廣積數之和是多少? (5 分)

(2) 10、11、12、13、14、15、16、17、18、19 所有廣積數之和是多少? (6 分)

(3) 1、2、3、4、5、…..、998、999 所有廣積數之和是多少? (9 分)

<解析>

(1) 1~9 廣積數和=$1+2+3+..+9=45$

(2) 10~19 廣積數和=$1+1\times1+1\times2+1\times3+\ldots+1\times9=1+1\times(1+2+3+..+9)=1+1\times45=46$

(3) 20~29 廣積數和=$2+2\times1+2\times2+2\times3+\ldots+2\times9=2+2\times(1+2+3+..+9)=2+2\times45=46\times2$

30~39 廣積數和=$3+3\times1+3\times2+3\times3+\ldots+3\times9=3+2\times(1+2+3+..+9)=3+3\times45=46\times3$

…………

90~99 廣積數和=$9+9\times1+9\times2+9\times3+\ldots9\times9=9+9\times(1+2+3+..+9)=9+9\times45=46\times9$

$\therefore$1~99 廣積數和=$45+46\times(1+2+3+\ldots+9)=45+46\times45=45\times47=2115$

故 100~199 廣積數和=1+1×(1~99 廣積數之和)=$1+1\times2115=1\times2116$

200~299 廣積數和=2+2×(1~99 廣積數之和)=$2+2\times2115=2\times2116$

300~399 廣積數和=3+3×(1~99 廣積數之和)=$3+3\times2115=3\times2116$

…………

900~999 廣積數和=9+9×(1~99 廣積數之和)=$9+9\times2115=9\times2116$

$\therefore$1~999 廣積數和=$2115+2116\times(1+2+3+..+9)=2115+2116\times45=97335$