第二十二屆 IMC 國際數學競賽台灣區初賽
22nd International Mathematics Contest (Taiwan)

國中三年級組

考生姓名		試題總分	
准考證號碼			

※參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。
※計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

答案區

一、選擇題(每題 10 分，共 200 分)

題號	1	2	3	4	5
答案	D	C	A	A	A
題號	6	7	8	9	10
答案	C	D	B	A	A
題號	11	12	13	14	15
答案	B	D	D	C	B
題號	16	17	18	19	20
答案	B	B	A	D	C

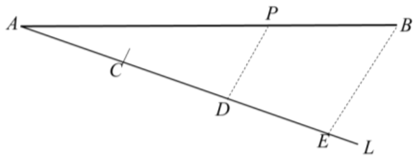
二、填充題(每題 12 分，共 60 分)

題號	1	2	3	4	5
答案	$10\sqrt{2}$	$y=4x-3$	2	$\frac{1}{2020}$	570

考試時間: 60 分鐘，卷面總分:300 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

一、選擇題(每題 10 分，共 200 分，請將答案填入答案表內)

1. 如右圖，已知$\overline{AB}$=11 公分，依下列步驟操作，得$\overline{AP}=x$ 公分，則下列何者正確?
   步驟 1: 過 A 點任作一直線 L
   步驟 2: 在直線 L 上取$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DE}$
   步驟 3: 連接$\overline{BE}$，過 D 作$\overline{DP}//\overline{BE}$，且交$\overline{AB}$於 P
   (A)$5.5<x<6$ (B)$6< x <6.5$ (C)$6.5< x <7$ (D)$7< x <7.5$

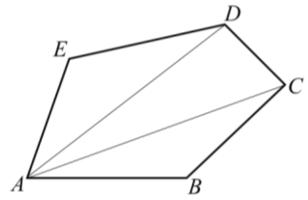


<解析>

$\overline{AP}=\frac{2}{3}\times\overline{AB}=\frac{2}{3}\times 11=\frac{22}{3}\fallingdotseq 7.3$

$\therefore 7<\overline{AP}=x<7.5$，選 D。

2. 如圖，小美、小莉、小曼三人在五邊形 ABCDE 公園散步，因此三人行進路線分別為:
   小美由 A →B →C →D →E
   小莉由 A →C →D →E
   小曼由 A →D →E
   請問這三人轉的角度和哪一個最小? (A)小美 (B)小莉 (C)小曼 (D)一樣多



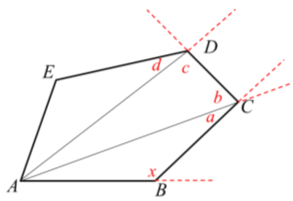
<解析>

小美轉 $180-x+180-a-b+180-c-d$

小莉轉 $180-b+180-c-d$

小曼轉 $180-d$

$\therefore$小曼轉的角度最小，選 C。



3. 已知從地面每上升 100 公尺，溫度就下降0.6°C，若早上六點位於 3952 公尺的玉山山頂溫度是-4°C，則此時地面的的溫度大約為何? (A)19.7°C (B)19.8°C (C)19.9°C (D)20°C

<解析>

設地面溫度為x°C，$x-\frac{3952}{100}\times 0.6=-4$，$x=-4+23.712=19.712$，選 A。

4. Anna set her phone passcode to the number 2014×2009−1998×2008. What are the first three digits of her passcode? (A)341 (B)431 (C)241 (D)421

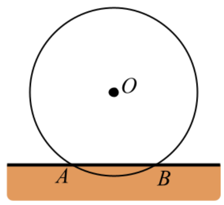
<解析>

令 $x=2000$，原式$=(x+14)(x+9)-(x-2)(x+8)$

$=x^2+23x+126-x^2-6x+16=17x+142$

$=17\times 2000+142=34142$，前 3 碼 341，選 A。

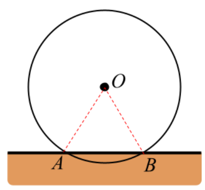
5. 如右圖，阿德將一圓形鐵環部分埋在地下，若$\overline{AB}$=12 公分，圓半徑也是 12 公分，則埋在地下部分 AB 的弧長是多少公分? (A) 4π (B) 6π (C) 9π (D) 12π



<解析>

連接$\overline{OA}$、$\overline{OB}$，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{AB}=12$

$\therefore\triangle$OAB 為正三角形，弧 $AB=\frac{1}{6}\times 2\times 12\pi=4\pi$，選 A。



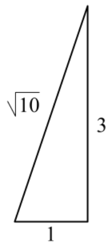
6. 有一個老時鐘，已知一點鐘敲一下，二點鐘敲二下，....，若五點整時，第一聲鐘響起到最後一聲鐘響起共計花了 6 秒，那麼某次鐘響費時 15 秒是幾點? (A)9 (B)10 (C)11 (D)12

<解析>

五點鐘時，時鐘響了五下，所以兩聲鐘響之間的時間為 $\frac{6}{4}$=1.5秒

15÷1.5=10，10+1=11，故 11 點，選 C。

7. Given that $\angle A$ is an acute angle and $\tan A=3$, find the value of $\cos^2 A-\sin^2 A$. (A) $\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $-\frac{4}{5}$



<解析>

$\tan A=\frac{3}{1}=\frac{對邊}{鄰邊}$，$\cos A=\frac{鄰邊}{斜邊}=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin A=\frac{對邊}{斜邊}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

所求$=\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2=\frac{1}{10}-\frac{9}{10}=-\frac{4}{5}$，選 D。

8. x、y 為正整數且 $y=\sqrt{x-26}+\sqrt{x+30}$，則 y 的最大值是多少? (A)14 (B)28 (C)8 (D)56

<解析>

令 $\sqrt{x-26}=m \rightarrow x-26=m^2$.....①，$\sqrt{x+30}=n \rightarrow x+30=n^2$.....② ($m$、$n\in N$，$m<n$)

$n^2-m^2=56$，$(n-m)(n+m)=56=1\times56=2\times28=4\times14=7\times8$

$n-m$	2	4
$n+m$	28	14

$\therefore y=m+n$，最大值 28

9. 設一等差數列的第 13 項到第 31 項的和為 133，則第 18 項到第 26 項的和為多少? (A)63(B)126(C)56(D)112

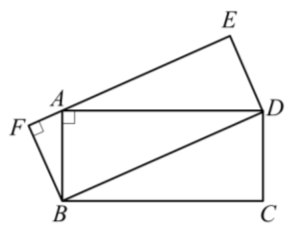
<解析>

$a_{13}+a_{14}+.....+a_{31}=133 \rightarrow \frac{a_1+12d+a_1+30d}{2}\times(31-13+1)=133$，$\frac{2a_1+42d}{2}\times19=133$

$\therefore a_{22}=a_1+21d=7$

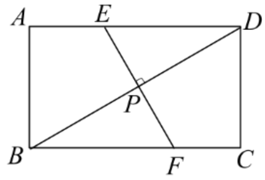
$\therefore a_{18}+a_{19}+.....+a_{26}=9\times a_{22}=9\times7=63$

10. 如右圖，四邊形 ABCD 與四邊形 BDEF 都是矩形，且△ADE 的面積與△AFB 的面積和為 10，求四邊形 ABCD 的面積為何? (A)20 (B)30 (C)40 (D)60



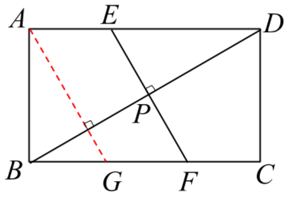
<解析>

ABCD 面積=2△ABD=2x(△ADE+△AFB)=2x10=20，選 A。



11. 右圖的矩形 ABCD 中，若$\overline{AB}$=60，$\overline{BC}$=80，$\overline{EF}\perp\overline{BD}$，則$\overline{EF}$=______。(A)74 (B)75 (C)76 (D)77

<解析>



作$\overline{AG}//\overline{EF}$交 BC 於 G

則△ABG~△DAB

∴$\overline{AG}:\overline{AB}=\overline{BD}:\overline{AD}$➔$\overline{AG}$:60=100:80

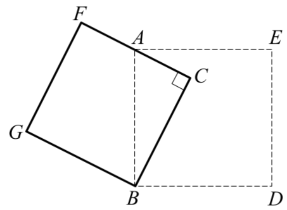
故$\overline{EF}=\overline{AG}$=75，選 B。

12. 3%、4%、x%的三種食鹽水，按 3:4:5 的重量比混合，得出 5%的食鹽水，則 x=? (A)4 (B)5 (C)6 (D)7

<解析>

0.03×3+0.04×4+a×5=0.05×(3+4+5)

0.09+0.16+5a=0.6，5a=0.35，a=0.07➔x=7，選 D。

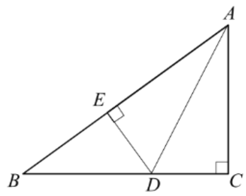


13. 如右圖，在三角形 ABC 中，∠ACB是直角，且正方形 ABDE 的面積是 225，正方形 BCFG 的面積是 144，則三角形 ABC 之周長為何? (A)12 (B)18 (C)24 (D)36

<解析>

$\overline{BC}$=12，$\overline{AB}$=15 且∠ACB=90°

∴$\overline{AC}=\sqrt{15^2-12^2}$=9➔△ABC 周長=12+9+15=36，選 D。



14. 如右圖，$\overline{AD}$平分∠BAC，$\overline{DE}\perp\overline{AB}$於 E，∠C=90°，若$\overline{AC}$=6，$\overline{BC}$=8，則$\overline{DE}$=? (A)$\frac{5}{3}$ (B)2 (C)3 (D) $\frac{10}{3}$

<解析>

∵$\overline{AD}$平分∠BAC ∴$\overline{CD}=\overline{DE}=x$，△ABC=△ACD+ABD

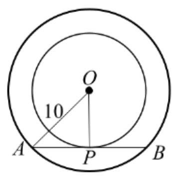
∴$\frac{1}{2}\times6\times8=\frac{1}{2}\times6\times x+\frac{1}{2}\times10\times x$，$x$=3，選 C。

15. 有兩個同心圓，大圓半徑為 10 公分，小圓面積為大圓面積的一半，若大圓的弦$\overline{AB}$與小圓相切，則$\overline{AB}$的長為多少公分? (A)$10\sqrt{3}$ (B)$10\sqrt{2}$ (C)13 (D)12

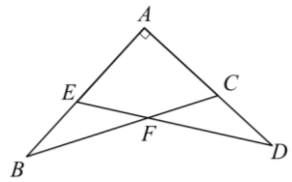
<解析>

$\overline{OP}^2\pi=10\times10\times\pi\times\frac{1}{2}$，$\overline{OP}^2$=50

$\overline{AP}^2+\overline{OP}^2=\overline{OA}^2$➔$\overline{AP}^2+50=10^2$，$\overline{AP}=5\sqrt{2}$，$\overline{AB}=2\overline{AP}=10\sqrt{2}$，選 B。



16. 如右圖，△ABC、△ADE 中，C、E 兩點分別在$\overline{AD}$、$\overline{AB}$上，且$\overline{BC}$與$\overline{DE}$相交於 F 點，若$\angle A=90°$，$\angle B=\angle D=30°$，$\overline{AC}=\overline{AE}=1$，則四邊形 AEFC 的周長為何? (A)2 (B) $2\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D)3



<解析>

①△ABC(30°-60°-90°)

$\overline{AC}=1$，$\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{BC}=2$

②等腰△BEF

➔$\overline{EF}=\overline{BE}=\sqrt{3}-1$，同理$\overline{FC}=\overline{CD}=\sqrt{3}-1$

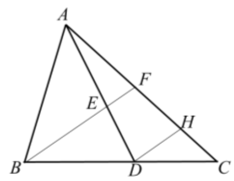
故 AEFC 周長$=1+1+\sqrt{3}-1+\sqrt{3}-1=2\sqrt{3}$，選 B。

17. 下列何者錯誤? (A)$\sqrt{900}=30$ (B)$\sqrt{9\frac{1}{4}}=3\frac{1}{2}$ (C) $\sqrt{14400}=120$ (D) $\sqrt{0.000324}=0.018$

<解析>

$\sqrt{9\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{37}{4}}=\frac{\sqrt{37}}{2}\neq 3\frac{1}{2}$，選 B。

18. 如右圖，在△ABC 中，$\overline{BD}:\overline{CD}=4:3$，$\overline{AE}:\overline{DE}=3:2$，且$\overline{DH}/\!/\overline{BF}$，$\overline{AC}=39$，則$\overline{CH}$ =? (A)9 (B)10 (C)12 (D)13



<解析>

$\because \overline{DH}/\!/\overline{BF}$ $\therefore \overline{AF}:\overline{FH}=\overline{AE}:\overline{DE}=3:2$

$\therefore \overline{FH}:\overline{CH}=\mathrm{BD}:\overline{CD}=4:3$，故$\mathrm{AF}:\overline{FH}:\overline{CH}=6:4:3$，又$\overline{AC}=39$

$\therefore \overline{CH}=\frac{3}{13}\times 39=9$，選 A。

19. For the quadratic equation $ax^2-(a-3)x+1=0$, if its two roots are equal, and the possible values of a are m and n, then find $m+n$. (A)7 (B)8 (C)9 (D)10

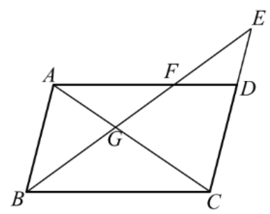
<解析>

$\mathrm{D}=(a-3)^2-4\cdot a\cdot 1=0$

$a^2-10a+9=0$➔$(a-9)(a-1)=0$，$a=9$ 或 1

$\therefore m+n=9+1=10$，選 D。

20. 如右圖，ABCD 為平行四邊形，若$\overline{CD}=2\overline{DE}$，則$\overline{BG}:\overline{GF}$=? (A)4:3 (B)2:1 (C)3:2 (D)5:3



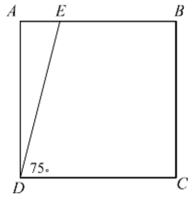
<解析>

∵△ABF~△DEF(AA 相似)

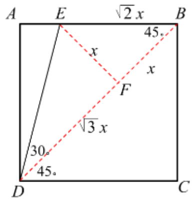
$\therefore \overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{DF}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{DE}}=2:1$

又△AGF~△CGB(AA 相似) $\therefore \overline{BG}:\overline{GF}=\overline{BC}:\overline{AF}=3:2$，選 C。

二、填充題(每題 12 分，共 60 分，請將答案填入答案表內)



1. In square ABCD, the area of triangle ADE is 50 cm^2, and $\angle EDC=75°$. Find the length of BE.



<解析>

連接$\overline{BD}$，過 E 作$\overline{EF}\perp\overline{BD}$，令$\overline{EF}=x$，$\overline{BE}=\sqrt{2}x$

且$\overline{DF}=\sqrt{3}x$ ➔ $\overline{BD}=\sqrt{3}x+x=(\sqrt{3}+1)x$

$\therefore\frac{1}{2}\left[(\sqrt{3}+1)x\right]^2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)x^2=50$

$\therefore\frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)^2x^2-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)x^2=50$ ➔ $(\sqrt{3}+1)^2x^2-2(\sqrt{3}+1)x^2=200$

$\therefore x^2\left(3+2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}-2\right)=200$，$x^2=100$，$x=10$，則$\overline{BE}=10\times\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

2. 已知平面直角坐標系中有一條光線L_1的方程式為 $y=4x+3$，光線先後在兩面鏡子上全反射，第一面鏡子為 y 軸，第二面鏡子為 x 軸，求經過兩次全反射後，光線所在的直線方程式L_2。

<解析>

第一次全反射，當 y 軸為鏡面，x 坐標取負，y 坐標不變，原直線 $y=4x+3$ 對稱後 ➔ $y=4(-x)+3=-4x+3$

第二次全反射，當 x 軸為鏡面，y 坐標取負，x 坐標不變，原直線 $y=-4x+3$ 對稱後 ➔ $-y=-4x+3$，$y=4x-3$

3. Find the integer solution x to the equation: $x^5+100x^4+197x=2026$. Find $x=$________.

<解析>

$x^5+100x^4+197x=2026 \rightarrow x(x^4+100x^3+197)=2026$，$x^4+100x^3+197=\frac{2026}{x}$

故 x 必為 2026 的因數

當 $x=1$，$1+100+197\neq\frac{2026}{1}$ (不合)

當 $x=2$，$16+800+197=\frac{2026}{2}=1013$，故 $x=2$

4. 計算$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2020}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2019}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2020}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2019}\right)=$________。

<解析>

令 $M=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2019}$，則原式$=(M+\frac{1}{2020})(1+M)-(1+M+\frac{1}{2020})M=M+M^2+\frac{1}{2020}+\frac{M}{2020}-M-M^2-\frac{M}{2020}=\frac{1}{2020}$

5. 將 5 件不同的獎品，分給甲、乙、丙、丁四人，獎品必須全部分完，則當乙、丙都至少 1 件時，，有________種分法。

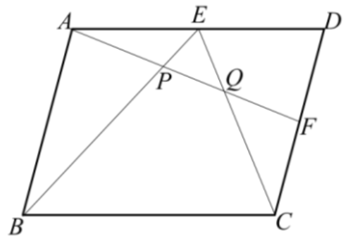
<解析>

①全部: $4^5=1024$

②乙或丙沒拿到: $3^5+3^5-2^5=454$ (乙不拿+丙不拿-乙丙都不拿)

③乙、丙都至少 1 件: $1024-454=570$

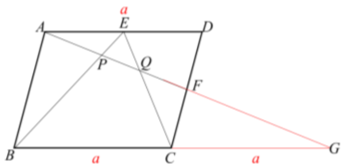
三、計算題(第 1、2 題請寫出計算過程，每題 20 分，共 40 分)



1. 設平行四邊形 ABCD 面積為 60，E、F 分別為$\overline{AD}$、$\overline{DC}$中點，連$\overline{EB}$和$\overline{EC}$，交$\overline{AF}$於 P、Q 兩點，求: (1)△AEQ 面積 (7 分) (2) △AEP 面積 (7 分) (3) △EPQ 面積 (6 分)

<解析>

①△AEQ~△GCQ →底比=高比=$\overline{AE}:\overline{CG}=\frac{1}{2}:1=1:2$



△AEP~△GBP →底比=高比=$\overline{AE}:\overline{BG}=\frac{1}{2}:2=1:4$

△ADF≅△GCF (ASA)

②四邊形 ABCD=ah=60 (令底$\overline{BC}=a$，高=h)

△AEQ=$\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{h}{3}=\frac{60}{12}=5$，△AEP=$\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{h}{5}=\frac{60}{20}=3$，△EPQ=5-3=2

2. 有一個整係數三次多項式 $P(x)$被一個二次多項式 $Q(x)$除，得到的商為 $4x+6$ 且餘式為 $2x+1$。如果將同一組多項式改為相乘，得到的積為 $16x^5+72x^4+128x^3+110x^2+45x+7$。求原來的多項式 $P(x)$與 $Q(x)$。(14 分/6 分)

<解析>

$P(x)=Q(x)(4x+6)+(2x+1)$ ……….3 分

$P(x)\times Q(x)=16x^5+72x^4+128x^3+110x^2+45x+7$

$[Q(x)(4x+6)+(2x+1)]\times Q(x)= =16x^5+72x^4+128x^3+110x^2+45x+7$

$(ax^2+bx+c)^2(4x+6)+(2x+1)(ax^2+bx+c)=16x^5+72x^4+128x^3+110x^2+45x+7$

依係數，得知 $a=2$，$c=1$→

$(2x^2+bx+1)^2(4x+6)+(2x+1)(2x^2+bx+1)=16x^5+72x^4+128x^3+110x^2+45x+7$，令 $x=1$，

$(2+b+1)^2(4+6)+(2+1)(2+b+1)=16+72+128+110+45+7$➔$10(3+b)^2+3(3+b)=378$

$90+60b+10b^2+9+3b=378$，$10b^2+63b-279=0$，$(10b+93)(b-3)=0$，$b=3$ 或-9.3(不合)

當 $b=3$，$Q(x)=2x^2+3x+1$，則 $P(x)=(2x^2+3x+1)(4x+6)+(2x+1)=$

$8x^3+12x^2+4x+12x^2+18x+6+2x+1=8x^3+24x^2+24x+7$