第二十二屆 IMC 國際數學競賽台灣區初賽

22nd International Mathematics Contest (Taiwan)

國中二年級組

考生姓名		試題總分	
准考證號碼			

※參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。

※計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

答案區

一、選擇題(每題 10 分，共 200 分)

題號	1	2	3	4	5
答案	D	C	C	D	C
題號	6	7	8	9	10
答案	A	B	C	A	C
題號	11	12	13	14	15
答案	C	A	C	C	D
題號	16	17	18	19	20
答案	B	D	D	C	C

二、填充題(每題 12 分，共 60 分)

題號	1	2	3	4	5
答案	(6, 4) (-6, 4) (6, -4) (-6, -4)	383	19	1024	60

考試時間: 60 分鐘，卷面總分:300 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

一、選擇題(每題 10 分，共 200 分，請將答案填入答案表內)

1. 安安帶了 a 張面額為 200 元或 500 元的禮券共 3000 元，到旺旺大賣場買了一台 1500 元的藍芽耳機，恰好可以用身上的禮券給付而不找零，請問 a 之值不可能是下列哪一個數? (A)6 (B)9 (C)12 (D)15

<解析>

設 200 元和 500 元禮券各有 x、y 張，則 $200x+500y=3000$，當 $x=15$，$y=0$，無法剛好湊足 1500 元，故 $a=12$、9、6 選 D。

x	15	10	5	0
y	0	2	4	6
合計	15	12	9	6

2. 從 1、2、3、……、20，這 20 個數中，最多可以選出多少個數，使得任意兩個數的差都不等於 4。 (A)10 (B)11 (C)12 (D)13

<解析>

$\boxed{1}$、$\boxed{2}$、$\boxed{3}$、$\boxed{4}$、~~5~~、~~6~~、~~7~~、~~8~~、$\boxed{9}$、$\boxed{10}$、$\boxed{11}$、$\boxed{12}$、~~13~~、~~14~~、~~15~~、~~16~~、$\boxed{17}$、$\boxed{18}$、$\boxed{19}$、$\boxed{20}$

滿足條件最多可以選出 12 個數，選 C。

3. 阿德和小忠到書局買同一種原子筆，但枝數不相同，原子筆的價格為整數，且大約在 10~15 元之間，而阿德花了 130 元，小忠花了 286 元，則原子筆一枝為多少元? (A)10 (B)12 (C)13 (D)15

<解析>

(130、286)=26

26 的因數=1、2、13、26 且價格在 10~15 之間

∴原子筆每枝 13 元，選 C。

4. 設兩多項式 A 與 B 的次數分別是五次和三次，則 A-B 的次數是多少? (A)二次 (B)三次 (C)四次 (D)五次

<解析>

當 A、B 兩多項式不同次，$A\pm B$的次數為 A、B 中較高的次數，選 D。

5. 已知$1^2+1=2^2-2$，$2^2+2=3^2-3$，$3^2+3=4^2-4$，…..，$99^2+99=100^2-100$，若$\frac{59^2+59}{31^2-31}=k$，則 k=? (A)2 (B)$\frac{61}{31}$ (C)$\frac{118}{31}$ (D) $\frac{122}{31}$

<解析>

$\frac{59^2+59}{31^2-31}=\frac{60^2-60}{30^2+30}=\frac{60(60-1)}{30(30+1)}=\frac{118}{31}$，選 C。

6. 為避免投資客炒房，政府想要開徵奢侈稅，若購買非自用住宅，在一年內轉移，則課徵 15%，在一至二年移轉，則課徵 10%，已知阿德今年二月在台北市購買第 2 間豪宅，但在今年 12 月以 2 億 4000 萬元賣掉，那麼阿德要繳交奢侈稅多少元?(A)3.6×10^7 (B) 2.4×10^7 (C) 2.8×10^7 (D) 1.3×10^7

<解析>

$240000000\times0.15=36000000=3.6\times10^7$，選 A。

7. 某個手機程式，點擊數 x 後，螢幕上的數會變成x^2，當一開始螢幕上的數 a，經過點擊 3 次後，螢幕上的數接近16^3，請問 a 最接近下列哪個數? (A)1.4 (B)2.8 (C)1.6 (D)2.4

<解析>

$a \to a^2 \to a^4 \to a^8$

$a^8=16^3=(2^4)^3=2^{12}=(2^3)^4=(a^2)^4$，$a^2=2^3=8 \Rightarrow a=\sqrt{8} \fallingdotseq 2.8$，選 B。

8. If $5x^{10}-8x^2+nx-4$ is divisible by $x-1$, then n=? (A)5 (B)6 (C)7 (D)8

<解析>

$5x^{10}-8x^2+nx-4=(x-1)Q(x)$，令 $x=1$ 代入

$\therefore 5-8+n-4=0$，$n=7$，選 C。

9. 若$x^3+ax+2=(x-1)^2(x+b)$，則 ab 之值為何? (A)-6 (B)0 (C)2 (D)6

<解析>

①$(x-1)^2(x+b)=(x^2-2x+1)(x+b)=x^3+ax+2 \to b=2$

②$(x^2-2x+1)(x+2)$，$-4x+x=-3x$，$a=-3$，則 $ab=(-3)\times 2=-6$，選 A。

10. 求$10^2\times 100^3\times 1000^4\times 10000^5$的乘積中，尾數共有幾個零? (A)36 (B)38 (C)40 (D)42

<解析>

原式$=10^2\times 10^6\times 10^{12}\times 10^{20}=10^{40} \Rightarrow$尾數有 40 個零，選 C。

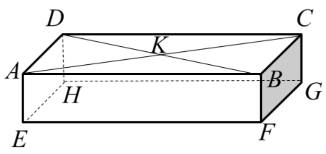
11. 計算$\left(\sqrt{15}-\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2$=? (A) $\frac{8\sqrt{3}}{15}$ (B) $\frac{8\sqrt{5}}{15}$ (C) $\frac{49}{15}$ (D) $\frac{56}{15}$

<解析>

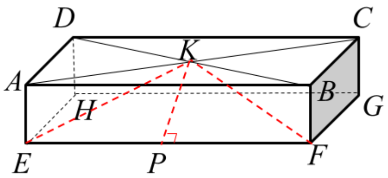
①$\sqrt{15}-\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{15}-\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}=\frac{15\sqrt{15}-5\sqrt{15}-3\sqrt{15}}{15}=\frac{7\sqrt{15}}{15}$

②$\left(\frac{7\sqrt{15}}{15}\right)^2=\frac{49\times 15}{15^2}=\frac{49}{15}$，選 C。

12. 右圖為一長方體，其長$\overline{AB}=4$，寬$\overline{AD}=2$，高$\overline{AE}=1$，K 為 ABCD 對角線之交點，則△KEF 的面積為多少? (A) $2\sqrt{2}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) $5\sqrt{2}$



<解析>



$\overline{AK}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\overline{KE}=\sqrt{\overline{AK}^2+\overline{AE}^2}=\sqrt{5+1}=\sqrt{6}$

△KEF 中，$\overline{KE}=\overline{KF}=\sqrt{6}$，$\overline{EF}=4$

作$\overline{KP}\perp\overline{EF}$於 P，$\overline{KP}=\sqrt{\overline{KF}^2-\overline{PF}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-2^2}=\sqrt{2}$

故△KEF 的面積$=\frac{1}{2}\times\overline{EF}\times\overline{KP}=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，選 A。

13. Let x and y be positive integers. If the sum $x+y$, the difference $x-y$, the product xy, and the quotient $\frac{x}{y}$ add up to 735, then what is the value of $x+y$? (A)84 (B)90 (C)96 (D)100

<解析>

$x+y+x-y+xy+\frac{x}{y}=735$，$2x+xy+\frac{x}{y}=735$，$\frac{2xy}{y}+\frac{xy^2}{y}+\frac{x}{y}=735$

$\Rightarrow \frac{x}{y}(2y+y^2+1)=735$，$\frac{x}{y}(y+1)^2=15\times7^2$

$\therefore y+1=7$，$\frac{x}{y}=15$，$y=6$，$x=90$，故 $x+y=90+6=96$，選 C。

14. 下列何者是$(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)$之因式? (A)$x+4$ (B)x^2+2 (C) x^2+4 (D) $(x-2)^2$

<解析>

$(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)=(x-2)[x^2(x+2)+4(x+2)]=(x+2)(x-2)(x^2+4)$，選 C。

15. 安安的撲滿中，有 1 元、5 元及 10 元的硬幣共 56 枚，總金額為 341 元，已知 5 元與 10 元的枚數比為 3:5，則一元硬幣共有多少枚? (A)13 (B)14 (C)15 (D)16

<解析>

設 5 元硬幣有 $3r$ 枚，10 元硬幣有 $5r$ 枚，1 元硬幣有 $56-8r$ 枚

$5\times3r+10\times5r+1\times(56-8r)=341$

$15r+50r+56-8r=341$，$57r=285$，$r=5$

故 1 元硬幣有 56-40=16，選 D。

16. 計算$\frac{2023\times2021}{2022}+\frac{1}{2022}$之值為何? (A)2021 (B)2022 (C)2023 (D)2024

<解析>

$\frac{2023\times2021}{2022}+\frac{1}{2022}=\frac{(2022+1)(2022-1)+1}{2022}=\frac{2022^2}{2022}=2022$，選 B。

17. In the product $(2x^2-3x+a)(2x-5)$, the coefficient of the x-term is 19. Find the sum of the coefficients of this term. (A)2 (B)-2 (C)3 (D)-3

<解析>

$15+2a=19$，$a=2$

$(2x^2-3x+2)(2x-5)$，以 $x=1$ 代入

係數和$=(2-3+2)(2-5)=1\times(-3)=-3$，選 D。

18. 若 x 為整數，且滿足不等式 $3x-7>3-x$，則 $2x+5$ 之值可能為下列哪一個數? (A)9 (B)10 (C)12 (D)13

<解析>

$4x>3+7$，$4x>10$，$x>\frac{5}{2}$，且 x 為整數

$\therefore x=3$、4、5、6、…… $\rightarrow$ $2x=6$、8、10、12、……

$2x+5=11$、13、15、17、…..，選 D。

19. 在 50 場球賽中，前 30 場老虎隊的勝率為 0.5，又連敗兩場後，那麼剩下 18 場至少要贏幾場，勝率才能達到 0.6 以上？(沒有和局) (A)13 (B)14 (C)15 (D)16

<解析>

$30\times0.5=15$，$50\times0.6=30$

$30-15=15$，選 C。

20. m 為整數，$\begin{cases} mx+2y=10 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$，其中 x、y 為正整數，則所有 m 的和=? (A)2 (B)1 (C)0 (D)-2

<解析>

$x=\frac{10}{m+3}$，$y=\frac{15}{m+3}$ ➔ $m+3 \mid 10$，$m+3 \mid 15$

$\therefore m+3$ 是 10、15 的公因數

$\therefore m+3=5$ 或 1，得 $m=2$ 或-2，故 $2+(-2)=0$，選 C。

二、填充題(每題 12 分，共 60 分，請將答案填入答案表內)

1. Factor the following polynomial completely and find all integer solutions: $x^4+3y^4-2064=0$. Then (x, y)=_____.

<解析>

$x^4+3y^4-2064=0 \rightarrow 4y^4=2064$，$y^4=516$，得 $y=4$ 或-4 最接近

當 $y=4$ 代入，$x^4+3\times4^4=2064$，$x^4=1296$，$x=6$ 或 -6

當 $y=-4$ 代入，$x^4+3\times(-4)^4=2064$，$x^4=1296$，$x=6$ 或 -6

故數對$(x, y)=(6, 4)$、$(-6, 4)$、$(6, -4)$、$(-6, -4)$

2. A seven-digit number $N=19a202b$ (where a, b are digits) is divisible by 9, 23, and 25. Find the largest prime factor of N.

<解析>

$1+9+a+2+0+2+b=14+a+b=18$ 或 27

5 的倍數→$b=0$ 或 5

$[9, 23, 25]=5175$

① 當 $b=0$，$a=4$ ➔ $1942020\div5175$(不合)

② 當 $b=5$，$a=8$ ➔ $1982025\div5175=383$，最大質因數為 383

3. 有 9 個連續的正整數，其平方和為 2085。求這些整數中最大的數是_____。

<解析>

$(n-4)^2+(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2=2085$，

$9n^2+(16+9+4+1)\times2=2085$，

$9n^2=2085-60=2025$，$n^2=225$，$n=15$，最大數 $15+4=19$

4. 求$\frac{11\times12\times13\times\ldots\times20}{1\times3\times5\times\ldots\times19}$之值=_____。

<解析>

原式$=\frac{11\times12\times13\times\ldots\times20\times(2\times4\times6\times\ldots\times20)}{1\times3\times5\times\ldots\times19\times(2\times4\times6\times\ldots\times20)}=\frac{11\times12\times13\times\ldots\times20\times2^{10}\times(1\times2\times3\times\ldots\times10)}{20!}=\frac{2^{10}\times20!}{20!}=2^{10}=1024$

5. 甲、乙、丙、丁、戊、己六人排成一列，甲排在乙、丙左方，丁排在乙、丙右方，共有_____種排法。

<解析>

①6 個人排成一列，戊、己 2 人先排，有 $6\times5=30$

②剩下 4 個位子，丁在最右，甲在最左，乙、丙可以互換，有 $1\times1\times2=2$

③$30\times2=60$ 種

三、計算題(第 1、2 題請寫出計算過程，每題 20 分，共 40 分)

1. $a=\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}$、$b=\sqrt{2}+\sqrt{7}+\sqrt{14}$、$c=\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{11}$

(1)比較 a、b 的大小 (6 分)

(2)比較 b、c 的大小(6 分)

(3)比較 a、b、c 的大小(8 分)

<解析>

(1) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{11}\right)^2=16+2\sqrt{55}$，$\left(\sqrt{2}+\sqrt{14}\right)^2=16+2\sqrt{28}$

$\therefore\sqrt{5}+\sqrt{11}>\sqrt{2}+\sqrt{14}\Rightarrow a>b$

(2) $(\sqrt{7}+\sqrt{14})^2=21+2\sqrt{98}$，$(\sqrt{10}+\sqrt{11})^2=21+2\sqrt{110}$

$\therefore\sqrt{7}+\sqrt{14}>\sqrt{10}+\sqrt{11}\Rightarrow c>b$

(3) $(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2=12+2\sqrt{35}$，$(\sqrt{2}+\sqrt{10})^2=12+2\sqrt{20}$

$\therefore\sqrt{5}+\sqrt{7}>\sqrt{2}+\sqrt{10}\Rightarrow a>c$，則 $a>c>b$

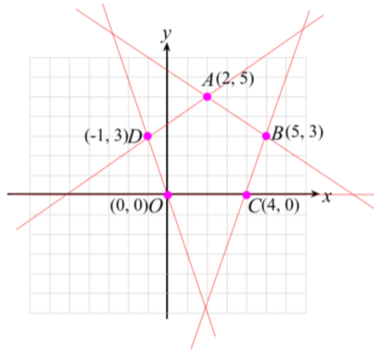
2. 在平面坐標軸上，有 5 條直線，已畫出L_1、L_2、L_5:

① $L_1: y=0$ ② $L_2: y=3x-12$ ③ $L_3: y=-\frac{2}{3}x+\frac{19}{3}$ ④ $L_4: y=\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$ ⑤ $L_5: y=-3x$

(1)求這五條直線交點形成五邊形的頂點坐標。(10 分)

(2)求五邊形的周長及面積。(6 分/4 分)

<解析>



(1) L_1取(0, 0)、(4, 0)作圖；L_2取(4, 0)、(5, 3)作圖；L_3取(2, 5)、(5, 3)作圖；L_4取(-1, 3)、(2, 5)作圖；；L_5取(0, 0)、(1, -3)作圖，得出圖解五邊形各項點坐標:
$A(2, 5)$、$B(5, 3)$、$C(4, 0)$、$O(0, 0)$、$D(-1, 3)$

(2) ①周長$=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CO}+\overline{OD}+\overline{DA}$

$=\sqrt{(-3)^2+2^2}+\sqrt{1^2+3^2}+\sqrt{4^2+0^2}+\sqrt{1^2+(-3)^2}+\sqrt{3^2+2^2}$

$=\sqrt{13}+\sqrt{10}+4+\sqrt{10}+\sqrt{13}=4+2\sqrt{10}+2\sqrt{13}$

②面積=矩形-4 個直角三角形

$6\times5-(1\times3\times\frac{1}{2}+3\times2\times\frac{1}{2}+3\times2\times\frac{1}{2}+1\times3\times\frac{1}{2})$

$=30-(1.5+3+3+1.5)=30-9=21$