# 第二十一屆IMC國際數學競賽台灣區複賽

21st International Mathematics Contest(Taiwan)

# 高中一年級試卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：＿＿＿＿＿＿ 准考證號碼：＿＿＿＿＿＿ 試題總分：＿＿＿＿＿＿

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績!
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績!

| 選擇題 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | B | C | B | A | B | D | C |
| 填充題 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 答案 | 11 | 18、36、54、81 | 31395 | 41 | 97 | $\frac{17}{26}$ | 192 | 1200 |

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 函數$f(x)=3^{x+1}-4\cdot 9^x$，已知$x^2+x\le 0$，則 $f(x)$的最小值是多少? (A)1 (B)0 (C)-1 (D)2

<解析>

令$a=3^x$，$f(a)=3a-4a^2$，$f(a)=-4(a^2-\frac{3}{4}a)=-4(a-\frac{3}{8})^2+\frac{9}{16}$，且$x^2+x\le 0$，$x(x+1)\le 0$，$-1\le x\le 0$

當$x=0$，$a=3^0=1$，$f(1)=-1$；當 $x=-1$，$a=3^{-1}=\frac{1}{3}$，$f(\frac{1}{3})=1-4\times\frac{1}{9}=-\frac{4}{9}$，最小值=-1，選 C。

2. $r$、$s$ 均為實數，且 $r<s$，$a=\frac{r+3s}{4}$，$b=\frac{r+5s}{6}$，$c=\frac{5r+s}{6}$，則 $a$、$b$、$c$ 的大小次序為
(A)$c<b<a$ (B)$c<a<b$ (C)$a<b<c$ (D)$a<c<b$

<解析>

都是 4 等分及 6 等分點

令 $r=0$，$s=12$➔ $a=\frac{r+3s}{4}=\frac{0+36}{4}=9$，$b=\frac{r+5s}{6}=\frac{0+60}{6}=10$，$c=\frac{5r+s}{6}=\frac{0+12}{4}=3$

則大小順序為 $b>a>c$，選 B

3. Let the quadratic function $y=x^2+6x+k$ have its graph intersect the $x$-axis at points $A$ and $B$. If $\overline{AB}=4$, find the real number $k$. (A)-4 (B)2 (C)5 (D)8

<解析>

$y=x^2+6x+k=(x+3)^2+k-9$

➔對稱軸 $x=-3$

$\overline{AB}=4=2\times 2$，$A(-3-2, 0)=A(-5, 0)$及 $B(-3+2, 0)=B(-1, 0)$

$x^2+6x+k=(x+5)(x+1)$，$k=5$，選 C。

4. 連接 $A(4, 1)$、$B(1, 2)$的線段與直線$L$:$2x-3y+k=0$相交，則 $k$ 的範圍是?
(A) $-4\le k\le 5$ (B) $-5\le k\le 4$ (C) $-3\le k\le 2$ (D) $-2\le k\le 3$

<解析>

$\overline{AB}$與 $L$ 相交➔$A$、$B$ 在異側或在 $L$ 上

即$(8-3+k)(2-6+k)\le 0$，$(k+5)(k-4)\le 0$➔$-5\le k\le 4$，選 B。

5. 設$L_1$:$3x+4y-5=0$，求過 $P(1, -1)$且與$L_1$垂直的直線$L_2$的直線方程式為_______。
(A)$4x-3y-7=0$ (B)$4x+3y+7=0$ (C)$4x-3y+11=0$ (D)$4x+3y-11=0$

<解析>

$3x+4y-5=0$，$m=-\frac{3}{4}$，且$L_1\perp L_2$，故$L_2$的斜率$=(-1)\div(-\frac{3}{4})=\frac{4}{3}$

故過 $P$ 的的直線方程式: $y=\frac{4}{3}(x-1)-1$，$3y=4x-4-3$，$3y=4x-7$，$4x-3y-7=0$，選 A。

6. 四次方程式 $mx^4-(m-3)x^2+3m=0$，有一個根小於-2，其餘三個根大於-1，則 $m$ 的取值範圍為_______。 (A) $-1<m<0$ (B) $-\frac{4}{5}<m<0$ (C) $0<m<1$ (D) $-\frac{1}{2}<m<0$

<解析>

設$t=x^2$，則$mt^2-(m-3)t+3m=0$

$\because m=0$ 不符合題意，故$m\neq 0$

方程可化成$t^2-\frac{m-3}{m}t+3=0$，

設$f(x)=t^2-\frac{m-3}{m}t+3$，且$f(t_1)=f(t_2)=0$

當$t_1=x_1^2$，$t_2=x_2^2$➔$x_1=-\sqrt{t_1}$，$x_2=\sqrt{t_1}$，$x_3=-\sqrt{t_2}$，$x_4=\sqrt{t_2}$

滿足$-\sqrt{t_1}<-2$且$-\sqrt{t_2}>-1$➔$\sqrt{t_1}>2$，$\sqrt{t_2}<1$➔$t_1>4$，$0<t_2<1$

故 $f(0)=3>0$；

$f(1)=1-\frac{m-3}{m}+3<0$，$4-\frac{m-3}{m}<0$，$\frac{4m-m-3}{m}<0$，$(3m+3)\text{m}<0$，$-1<m<0$

$f(4)=16-\frac{m-3}{m}\times 4+3<0$，$19-\frac{4m-12}{m}<0$，$\frac{19m-4m+12}{m}<0$，$\frac{15m+12}{m}<0$

➔ $(15m+12)m<0$，$-\frac{4}{5}<m<0$，則取值範圍為$-\frac{4}{5}<m<0$，選 B。

7. 設圓 $C$: $x^2+y^2-2x-24=0$與直線 $L$: $3x+4y+k=0$相交於相異兩點，則實數 $k$ 的範圍為何? (A)$16<k<18$ (B)$-16<k<18$ (C)$-22<k<28$ (D)$-28<k<22$

<解析>

$x^2+y^2-2x-24=0$➔$(x-1)^2+y^2=25$，圓心 $O(1, 0)$，半徑 $r=5$

圓心與直線相交於相異兩點

圓心到直線 $L$ 的距離 $d(O, L)=\frac{|3\times 1+4\times 0+k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|k+3|}{5}<5$

$|k+3|<5$，$-25<k+3<25$，$-28<\text{k}<22$，選 D。

8. 當 $x$ 靠近 1 時，$y=x^3+2x^2-4x+1$的局部圖形會接近哪一個選項?
(A)$y=x-1$ (B)$y=2x-2$ (C)$y=3x-3$ (D)$y=4x-4$

<解析>

$y=x^3+2x^2-4x+1=(x-1)^3+5(x-1)^2+3(x-1)$，取 $x$ 靠近 1 時近似於 $y=3(x-1)=3x-3$，選 C。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 若$f(x)=x^3-2x^2-x+5$，則 $g(x)=f(f(x))$除以 $x-2$ 所得的餘式為________。

<解析>

$\because g(2)=f(f(2))=f(8-8-2+5)=f(3)=27-18-3+5=11$

$\therefore$餘式=11

2. 有 4 個整數，其中前 3 個數成等差數列，後 3 個數成等比數列，並且第 1 個數與第 4 個數的和是 99，第 2 個數與第 3 個數的和是 90，求這 4 個整數是________。(全對才給分)

<解析>

設 $A$、$B$、$C$、$D$，$A=2B-C$ 且 $\frac{C}{B}=\frac{D}{C}$，$D=\frac{C^2}{B}$

$A+D=99$，$B+C=90$ $\rightarrow A=99-D$，$C=90-B$

$99-\frac{(90-B)^2}{B}=2B-(90-B)$，$99B-(8100-180B+B^2)=2B^2-(90-B)B$

$99B-8100+180B-B^2=2B^2-90B+B^2$，$4B^2-369B+8100=0$

$B=\frac{369\pm\sqrt{369^2-4\times4\times8100}}{8}=\frac{369\pm\sqrt{6561}}{8}=\frac{369\pm81}{8}=36$(取整數)

$\therefore C=90-36=54$，$A=36\text{x}2-54=72-54=18$，$D=99-18=81$

此 4 個整數是 18、36、54、81

3. 如右表所示，試求第 1 列到第 45 列所有數字之總和為________。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | | | | | → 第一列 |
| | | | 1 | 2 | 1 | | | | → 第二列 |
| | | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | | | → 第三列 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | | → 第四列 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |

<解析>

$a_1=1$

$a_2=1+2+1=4=2^2$

$a_3=1+2+3+2+1=9=3^2$

....

$a_{45}=1+2+3+\ldots+45+\ldots+2+1=45^2=2025$

所求$=1^2+2^2+3^2+\ldots+45^2=\frac{45(45+1)(2\cdot45+1)}{6}=\frac{45\times46\times91}{6}=31395$

4. <u>澄甄</u>投資股票型基金，已知每星期結算都損失該星期初資金的 1%，若第 $n$ 星期結算後資金總損失已超過原始資金的 $\frac{1}{3}$，則 $n$ 的最小值為________。(其中 log2=0.3010，log3=0.4771，log7=0.8451，log11=1.0414)

<解析>

設原始資金為 $x$，則每星期剩下 $x(1-0.01)=\frac{99}{100}x$

得 $x\cdot(\frac{99}{100})^n<(1-\frac{1}{3})x$，$(\frac{99}{100})^n<\frac{2}{3}$

$\therefore \log(\frac{99}{100})^n<\log\frac{2}{3}$，$n(\log99-\log100)<\log2-\log3$

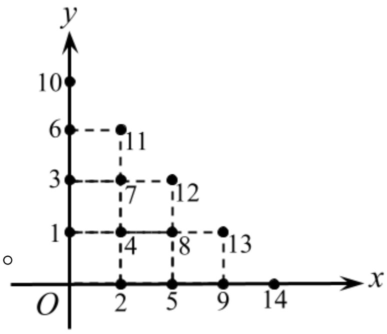
$\to n(2\log3+\log11-2)<\log2-\log3$

$\to n(2\times0.4771+1.0414-2)<0.3010-0.4771$

$\to n\cdot(-0.0044)<-0.1761$

$\therefore n>\frac{0.1761}{0.0044}=40.02....$，$n\geq41$，$n=41$

5. 將平面上之格子點(坐標為整數的點)如圖加以編號，設編號第 100 號之點的坐標為$(m, n)$，則$m^2+n^2=$________。

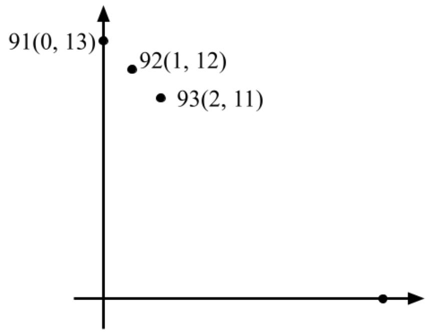



<解析>

討論 $y$ 軸坐標規律 0、1、3、6、10、15、21、28、36、45、55、66、78、91

討論 $x$ 軸坐標規律 0、2、5、9、14、20、27、35、44、54、65、77、90、104

故第 100 號的點為(13-4,13-9)=(9, 4)，則$(m, n)=(9, 4)$，故$m^2+n^2=81+16=97$




| 編號 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 坐標 | (0, 13) | (1, 12) | (2, 11) | (3, 10) | (4, 9) | (5, 8) | (6, 7) | (7, 6) | (8, 5) | (9, 4) |

6. It knows $a$ and $b$ are the different integer and absolute value of them are less than 7. The probability of having two unequal real roots of the equation $x^2-ax+2b=0$ is ________.

<解析>

$\because$有兩個不相等的實數根，$D>0\Rightarrow a^2-8b>0$，$a^2>8b$

且$0\leq|a|<7$， $0\leq|b|<7$

$\therefore a=0$、±1、±2、±3、±4、±5、±6，共有 13 種選法，且 $a$ 和 $b$ 相異

共有 $a\times b=13\times12=156$ 種選法。

①當 $a=6$，$b=-6$、-5、-4、-3、-2、-1、0、1、2、3、4，共 11 種

當 $a$=-6，$b$=-5、-4、-3、-2、-1、0、1、2、3、4，共 10 種

②當 $a$=5，$b$=-6、-5、-4、-3、-2、-1、0、1、2、3，共 10 種

當 $a$=-5，$b$=-6、-4、-3、-2、-1、0、1、2、3，共 9 種

③當 $a$=4，$b$=-6、-5、-4、-3、-2、-1、0、1，共 8 種

當 $a$=-4，$b$=-6、-5、-3、-2、-1、0、1，共 7 種

④當 $a$=3，$b$=-6、-5、-4、-3、-2、-1、0、1，共 8 種

當 $a$=-3，$b$=-6、-5、-4、-2、-1、0、1，共 7 種

⑤當 $a$=2，$b$=-6、-5、-4、-3、-2、-1、0，共 7 種

當 $a$=-2，$b$=-6、-5、-4、-3、-1、0，共 6 種

⑥當 $a$=1，$b$=-6、-5、-4、-3、-2、-1、0，共 7 種

當 $a$=-1，$b$=-6、-5、-4、-3、-2、0，共 6 種

⑦當 $a$=0，$b$=-6、-5、-4、-3、-2、-1，共 6 種

共有 11+10+10+9+8+7+8+7+7+6+7+6+6=102 種，故機率$=\frac{102}{156}=\frac{17}{26}$。

7. If the consecutive positive integers from 1 to 1000 are written in order, a total of ________ zeros are written.

<解析>

①恰含 1 個 0，$\square$0→9 個；$\square\square$0→9x9=81 個；$\square$0$\square$→9x9=81 個

共有 9+81+81=171 個

②恰含 2 個 0，$\square$00→9 個

③恰含 3 個 0，$\square$000→1 個

共有 171x1+9x2+3x1=192

8. $A$、$B$、$C$、$D$、$E$、$F$、$G$ 7 人中，選出 5 人作直線排列，5 人中恰含 $A$、$B$ 二人中之一人的排法有________種。

<解析>

①$C$、$D$、$E$、$F$、$G$ 找 4 人排列: 5x4x3x2=120

②A 在 4 人排列中: 120x5=600；B 在 4 人排列中: 120x5=600

∴600x2=1200。

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. Given that $a$, $b$, $c$ are three distinct real numbers and $a+b+c\neq 0$.

Prove that $(a+b+c)$ and $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ have the same sign.

<解析>

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)]$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$

且 $a$、$b$、$c$ 為相異實數➔$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2>0$

∴$a$+b+c 與$a^3+b^3+c^3-3abc$同號

2. 平面上有一光源 $P(8, 10)$向圓$(x-3)^2+(y-5)^2=5$照射並投影在 $x$ 軸上的圖形影子的長是多少?

<解析>

①如圖，$P$ 在 $x$ 軸上的投影為線段 $AB$

②過 $P$ 向圓作切線，設為$L$:$y-10=m(x-8)$，$mx$-y$+10-8m=0$

且圓心 $O(3, 5)$，半徑=$\sqrt{5}$

∵ $d(O, L)=\frac{|3m-5+10-8m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$

➔$2m^2-5m+2=0$，$m=\frac{1}{2}$ 或 $m=2$

∴$L$:$y-10=\frac{1}{2}(x-8)$ 或 $y-10=2(x-8)$

交於 $x$ 軸上，令 $y=0$，得 $x=-12$ 或 3，則$\overline{AB}=15$