第二十一屆 IMC 國際數學競賽台灣區初賽
21th International Mathematics Contest (Taiwan)

高中二年級組

考生姓名		試題總分	
准考證號碼			

◎參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。

◎計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

選擇題答案區

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

考試時間:60 分鐘 卷面總分:300 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

1. 若多項式 $f(x)$除以 x^3-1 得餘式 $2x^2-3x+4$，則 $f(x)$除以 x^2+x+1 的餘式為____。
   (A)$-3x+2$ (B)$-5x+2$ (C)$3x-2$ (D)$5x-2$

<解析>

$f(x)=(x^3-1)q(x)+2x^2-3x+4=\underbrace{(x-1)(x^2+x+1)q(x)}_{\text{被}x^2+x+1\text{ 整除}}+2x^2-3x+4$

$\therefore 2x^2-3x+4=2(x^2+x+1)+(-5x+2)$

選 B。

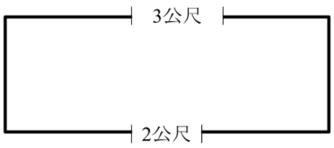
2. 觀察數列 $\frac{1}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{4}{4}$、$\frac{1}{5}$、.....的規律，則$\frac{13}{29}$為第幾項?
   (A)419 (B)420 (C)421 (D)422

<解析>

$\frac{1}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{3}$、.....、$\frac{28}{28}$，共 $1+2+3+4+\ldots+28=\frac{28\times29}{2}=406$ 項

$\therefore \frac{1}{29}$、$\frac{2}{29}$、$\frac{3}{29}$、......、$\frac{13}{29}$ $\therefore \frac{13}{29}$為 419 項，選 A。

3. 如右圖，農夫老黃想 95 公尺長的竹籬笆圍成一長方形菜圃，並在其中兩邊各留著寬 3 公尺與 2 公尺的出入口，老黃則所能圍成之長方形最大面積為____平方公尺。



   (A)525 (B)600 (C)625 (D)650

<解析>

設長方形菜圃的寬 x 公尺，長 y 公尺

➔$(x-3)+(x-2)+y+y=95$，$x+y=50$

利用算幾不等式，$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$，$\frac{50}{2}\geq\sqrt{xy}$，$xy\leq625$

所求最大面積為 625 平方公尺，選 C。

4. Assuming n is a natural number, the maximum n value that satisfies $\sqrt{73+\sqrt{n}}<10$ is ____.
   (A)725 (B)726 (C)727 (D)728

<解析>

$\sqrt{73+\sqrt{n}}<10\rightarrow73+\sqrt{n}<100$，$\sqrt{n}<27$

$\therefore n<27^2=729$

則最大自然數 $n=728$，選 D。

5. 設△ABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$，則$cos\frac{A}{2}$=____。(A)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B)$\frac{5\sqrt{2}}{8}$ (C)$\frac{3\sqrt{2}}{4}$(D)$\frac{7\sqrt{2}}{8}$

<解析>

利用餘弦定理，$\cos A=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6}=\frac{9}{16}$

$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$，選 B。

6. $\triangle ABC$ 中，$\angle$A 之角平分線與邊 BC 相交之點為 D，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，$\angle A=120°$，則$\overline{AD}$之長為____。 (A)$\frac{15}{4}$ (B)$\frac{15}{8}$ (C)$\frac{15}{6}$ (D)$\frac{15}{7}$

<解析>

$\because \triangle ABC$ 之面積$=\triangle ABD$ 之面積$+\triangle ACD$ 之面積

$\therefore \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \sin 120°=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot \overline{AD}\cdot \sin 60°+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot \overline{AD}\cdot \sin 60°$

$\therefore 15=8\times \overline{AD}$，$\overline{AD}=\frac{15}{8}$，選 B。

7. 函數 $f(x)=3\cos x-4\sin x+2$ 有最大值時，x 為第幾象限角?
(A)第一象限角 (B)第二象限角 (C)第三象限角 (D)第四象限角

<解析>

$f(x)=5(\frac{3}{5}\cos x-\frac{4}{5}\sin x)+2=5\cos(x+\alpha)+2$

其中 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，α在第一象限

$x=-\alpha$時有最大值，$-\alpha$在第四象限，選 D。

8. 若 x 滿足方程式:$(\frac{1}{4})^{x-1}+7\times(\frac{1}{2})^{x}-2=0$，則 $x=$____。(A)2 (B)-2 (C)4 (D)-4

<解析>

令 $t=(\frac{1}{2})^{x}>0 \rightarrow t^2=(\frac{1}{4})^{x}$

原式$=4t^2+7t-2=0 \rightarrow (4t-1)(t+2)=0$

$t=\frac{1}{4}$ 或-2 (不合)，$(\frac{1}{4})^{2}=(\frac{1}{4})^{x}$，$x=2$，選 A。

9. 10 顆顏色不同的彈珠，依數量 3、3、2、2 分成四堆，則共有____種情形。
(A)5400 (B)5600 (C)6300 (D)6600

<解析>

所求$=\frac{C_3^{10}C_3^{7}C_2^{4}C_2^{2}}{2!2!}=\frac{120\times 35\times 6}{4}=6300$，選 C。

10. 某班某次測驗成績不佳，老師決定每位學生各加 5 分(加分後沒人超出滿分)，則加分前與加分後，下列有關學生成績的統計數值，不會改變的是____。 (A)算術平均數 (B)中位數 (C)標準差 (D)眾數

<解析>

原成績為 x_1，加 5 分後的成績為 y_1

則 $y_1=x_1+5$，則標準差不變

選 C。

11. 設實數 x、y 均大於 0，且 $2^x=3^y=6^{xy}$，則 $x+y=$____。(A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{1}{3}$ (C)$\frac{5}{6}$ (D)1

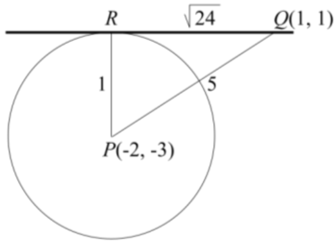
<解析>

$\begin{cases}2^x=6^{xy}\\3^y=6^{xy}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2=6^{y}....(1)\\3=6^{x}....(2)\end{cases}$

由(1)×(2)得$2\cdot 3=6^x\cdot 6^y$，$6=6^{x+y}$

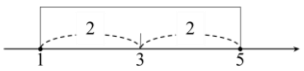
$\therefore x+y=1$，選 D。

12. 某都市 t 年時的人口數為 $p\times10^6$ 人，且年份和 p 值的關係式為$p=5\cdot2^{\frac{t-2001}{15}}$，試問此都市的人口數何時變成 2006 年人口數的 2 倍?
(A)2017 年 (B)2019 年 (C)2021 年 (D)2023 年
<解析>
2006 年的人口數= $5\cdot2^{\frac{2006-2001}{15}}=5\cdot2^{\frac{1}{3}}$
當 n 年時人口數的 2 倍➔$5\cdot2^{\frac{n-2001}{15}}=2\times(5\cdot2^{\frac{1}{3}})$，$2^{\frac{n-2001}{15}}=2^{\frac{4}{3}}$
$\frac{n-2001}{15}=\frac{4}{3}$，$n=2021$，選 C。

13. Let P be the center of circle $(x+2)^2+(y+3)^2=1$. Draw a tangent line to the circle from a point $Q(1, 1)$ outside the circle. The tangent point is R. What is the area of triangle PQR?
(A)6 (B)$\sqrt{6}$ (C)$2\sqrt{6}$ (D)$3\sqrt{6}$
<解析>


圓心 $P(-2, -3)$，$\overline{PQ}=\sqrt{(-2-1)^2+(-3-1)^2}=5$
$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2$，$25=1+\overline{RQ}^2$，$\overline{RQ}=\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}$
則△PQR 的面積$=1\times\sqrt{24}\times\frac{1}{2}=\sqrt{6}$，選 B。

14. 滿足不等式$(1.25)^n>10^7$ 的最小正整數為_____。($\log2≒0.3010$)
(A)70 (B)71 (C)72 (D)73
<解析>
$\log(\frac{5}{4})^n>\log10^7$➔$n(\log5-\log4)>7$，$n(1-\log2-2\log2)>7$
$n(1-3\times0.3010)>7\rightarrow n\times0.097>7$，$n>\frac{7}{0.097}≒72.1$，$n=73$，選 D。

15. 若$|ax+6|\leq b$ 的解為 $1\leq x\leq5$，則數對$(a, b)=$ _____。
(A) (-2, 4) (B) (2, -4) (C) (-2, -4) (D) (2, 4)
<解析>


➔$|x-3|\leq2$➔$|2x-6|\leq4$
$|-2x+6|\leq4\rightarrow(a, b)=(-2, 4)$，選 A。

16. 設 a、b 為正實數，且$\log_7a=11$，$\log_7b=13$，試問$\log_7(a+b)$之值最接近下列哪個選項?
(A)12 (B)13 (C)14 (D)23
<解析>
$\because\log_7a=11\rightarrow a=7^{11}$，$\log_7b=13\rightarrow b=7^{13}$
$\therefore\log_7(a+b)=\log_7(7^{11}+7^{13})=\log_7 7^{11}(1+49)=\log_7 7^{11}+\log_7 50$
$=11+\log_7 50≒11+\log_7 49=11+2=13$，選 B。

17. 通過(2, 7)的直線有無限多條，試求在第一象限與兩坐標軸所圍成之三角形面積最小是多少? (A)9 (B)18 (C)14 (D)28
<解析>
令過(2, 7)的直線為 L: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，且 a>0、b>0
$\because L$ 過(2, 7)
$\therefore\frac{2}{a}+\frac{7}{b}=1$，得 $\frac{\frac{2}{a}+\frac{7}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{7}{b}}\rightarrow\frac{1}{2}\geq\sqrt{\frac{14}{ab}}$，$\frac{1}{4}\geq\frac{14}{ab}$，$4\leq\frac{ab}{14}$，$28\leq\frac{ab}{2}$，選 D。

18. 所有周長為 20 的扇形中，面積最大值為____。
(A)20 (B)25 (C)30 (D)35

<解析>

設半徑 r，中心角 θ，周長 $=2r+r\theta=20$

由 $\frac{2r+r\theta}{2}\geq\sqrt{2r\cdot r\theta}$，$100\geq 2r^2\theta$，$25\geq\frac{r^2\theta}{2}$

則面積最大值為 25，選 B。

19. 袋中有 5 個紅球，4 個白球，從其中任意取出二球，若二球皆為紅色，可得 20 元，若二球皆為白色，可得 10 元，求其期望值為____。(A)$\frac{65}{9}$ (B)$\frac{65}{8}$ (C)$\frac{65}{12}$ (D)$\frac{65}{15}$

<解析>

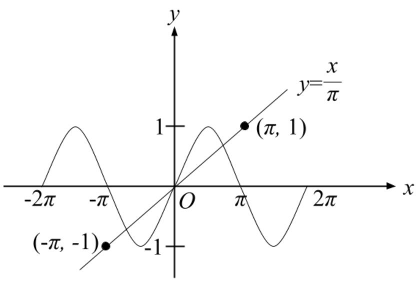
二球皆是紅球，$\frac{C_2^5}{C_2^9}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

二球皆是白球，$\frac{C_2^4}{C_2^9}=\frac{6}{36}=\frac{3}{18}$

期望值 $=\frac{5}{18}\times 20+\frac{3}{18}\times 10=\frac{130}{18}=\frac{65}{9}$，選 A。

20. 方程式 $\sin x=\frac{x}{\pi}$ 的實數解個數有____個。(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

<解析>



得 3 個實數解，選 C。

21. If $a=9874\times 9877$, $b=9875\times 9876$, which of the following is correct?
(A)$a>b$ (B)a<b (C)$a=b$ (D)$b-a=3$

<解析>

當 $2\times 3=6$，$1\times 4=4$，兩數和固定，相乘兩數之差越小，其乘積越大

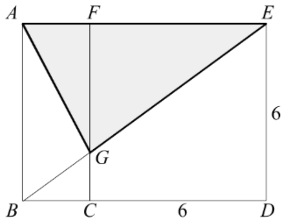
則 $a=9874\times 9877$，$b=9875\times 9876$，$a<b$，選 B。

<另解>

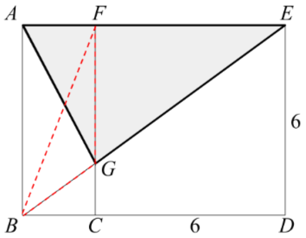
令 $x=9875$，$a=(x-1)(x+2)=x^2+x-2$

$b=x(x+1)=x^2+x$，則 $b>a$，且 $b-a=(x^2+x)-(x^2+x-2)=2$

22. As shown in the figure, the quadrilateral *ABDE* is a rectangle and the quadrilateral *FCDE* is a square. $\overline{CD}=\overline{DE}=6$ cm, then what is the area of the colored triangle *AGE* in square centimeters? (A)12 (B)14 (C)16 (D)18



<解析>



$\triangle AFG=\triangle BFG$(等底底高)

則$\triangle AGE=\triangle FBE=\overline{FE}\times\overline{AB}\div2=6\times6\div2=18$，選 D。

23. 計算$\frac{1\times2\times3+2\times4\times6+3\times6\times9+\ldots+2000\times4000\times6000}{3\times4\times5+6\times8\times10+9\times12\times15+\ldots+6000\times8000\times10000}=?$ (A)$\frac{1}{10}$ (B)$\frac{1}{100}$ (C)$\frac{1}{1000}$ (D)$\frac{1}{27}$

<解析>

$\frac{1\times2\times3}{3\times4\times5}=\frac{1}{10}$

$\frac{1\times2\times3+2\times4\times6}{3\times4\times5+6\times8\times10}=\frac{6+48}{60+480}=\frac{6+48}{10(6+48)}=\frac{1}{10}$，其值$=\frac{1}{10}$

原式$=\frac{1\times2\times3\times(1^3+2^3+3^3+\ldots+2000^3)}{3\times4\times5\times(1^3+2^3+3^3+\ldots+2000^3)}=\frac{1\times2\times3}{3\times4\times5}=\frac{1}{10}$，選 A。

24. How many zeros will appear in the product of $\underbrace{999\ldots999}_{100\text{ 個 }9}\times\underbrace{999\ldots999}_{100\text{ 個 }9}$? (中間有幾個 0)

(A)97 (B)98 (C)99 (D)100

<解析>

$9\times9=81\rightarrow0$ 個 0

$99\times99=9801\rightarrow1$ 個 0

$999\times999=998001\rightarrow2$ 個 0

……

原式→99 個 0，選 C。

<另解>

$(10^{100}-1)\times(10^{100}-1)=10^{200}-2\times10^{100}+1=\underbrace{999\ldots9}_{99\text{ 個 }9}8\underbrace{0000\ldots0}_{99\text{ 個 }0}1\rightarrow200$ 位數

25. 甲、乙、丙三個人各有若干元，首先甲給乙、丙每人現有錢數的 2 倍，接著由乙給甲、丙每人現有的錢數的 2 倍，最後丙給甲、乙每人現有的錢數的 2 倍，結果三人錢數相同。若原來丙有 70 元，則甲原來有多少元? (A)220 (B)330 (C)440 (D)550

<解析>

	甲	乙	丙
結果	27	27	27
丙給甲、乙之前	27÷(1+2)=9	27÷(1+2)=9	81-9-9=63
乙給甲、丙之前	9÷(1+2)=3	81-3-21=57	63÷(1+2)=21
甲給乙、丙之前	81-19-7=55	57÷(1+2)=19	21÷(1+2)=7

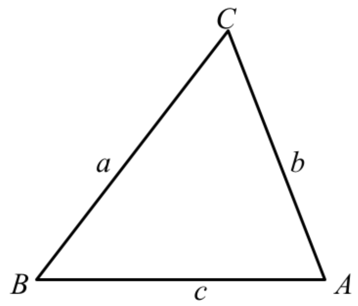
原來的甲:乙:丙=55:19:7

若丙原有 70 元，則甲原有 55x10=550 元，選 D。

二、計算題(25 分/25 分，共 50 分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. $\triangle ABC$ 三邊長 a、b、c，且 $s=\frac{a+b+c}{2}$，求證: $\triangle ABC$ 面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

<解析>



(1)作$\overline{CH}\perp\overline{AB}$於 H，令$\overline{AH}=x$，$\overline{BH}=c-x$，$\overline{CH}=h$

$a^2-x^2=h^2=b^2-(c-x)^2$

$a^2-x^2=b^2-(c^2-2cx+x^2)$

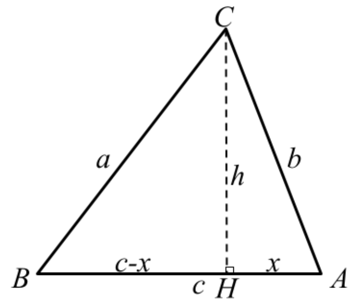
$x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$

(2)$h=\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2}=\sqrt{\left(a+\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)\left(a-\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)}$

$=\sqrt{\frac{(a+c)^2-b^2}{2c}\cdot\frac{b^2-(a-c)^2}{2c}}=\frac{\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}}{2c}$

(3)$2s=a+b+c\rightarrow 2s-2b=a+b+c-2b$，$2s-2b=a+c-b$，$2s-2a=b+c-a$

(4)$\triangle ABC=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}c\times\frac{\sqrt{2s(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}}{2c}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$



2. 解 $1+\log_4(x-1)>\log_2(x-9)$。

<解析>

(1)討論真數，$x-1>0$ 且 $x-9>0\rightarrow x>1$，$x>9$，得 $x>9$

(2)原式$=\log_4 4+\log_4(x-1)>\log_{2^2}(x-9)^2$，$\log_4 4(x-1)>\log_4(x^2-18x+81)$

$\therefore 4x-4>x^2-18x+81$，$x^2-22x+85<0$，$(x-17)(x-5)<0$

$\therefore 5<x<17$

由(1)(2)得，$9<x<17$