第二十一屆 IMC 國際數學競賽台灣區初賽

21th International Mathematics Contest (Taiwan)

高中一年級組

考生姓名		試題總分	
准考證號碼			

◎參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。

◎計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

選擇題答案區

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

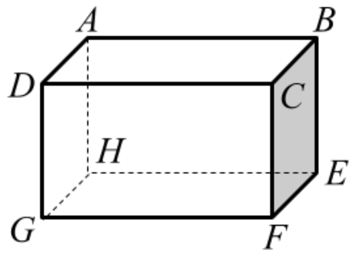
考試時間:60 分鐘 卷面總分:300 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

1. 若甲、乙、丙、丁四人排成一行，求甲、乙相鄰的機率是_____。
   (A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{1}{3}$ (C)$\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

<解析>
四人任意排列 $4\times3\times2\times1=24$
甲乙相鄰 $3\times2\times1\times2=12$
機率$=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$，選 A。



2. 長方體的 12 條邊中有_____組是歪斜線。
   (A)12 (B)16 (C)20 (D)24

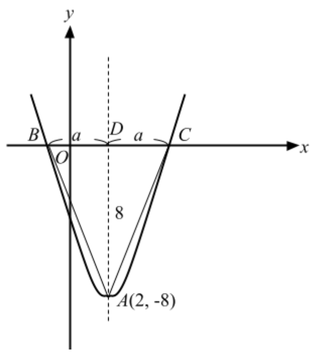
<解析>
討論$\overline{AB}$，與$\overline{AB}$共平面的邊有$\overline{AD}$、$\overline{BC}$、$\overline{AH}$、$\overline{BE}$
與$\overline{AB}$平行的邊有$\overline{CD}$、$\overline{HE}$、$\overline{GF}$
故與$\overline{AB}$歪斜的邊有$\overline{DG}$、$\overline{GH}$、$\overline{CF}$、$\overline{EF}$，共 4 組
每一條邊有 4 組歪斜線
共有$\frac{4\times12}{2}=24$，選 D。

3.已知 a、h、k 為三數，且二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 在坐標平面上的圖形通過(0, 5)、(10, 8)兩點，若 $a<0$，$0<h<10$，求 h 的最大範圍? (A)$0<h<5$ (B)$5<h<10$ (C)$0<h<6$ (D)$6<h<10$

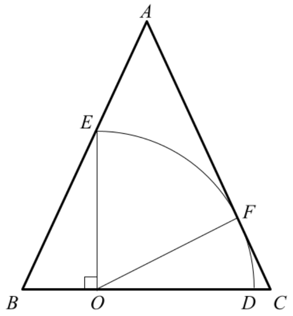
<解析>
將(0, 5)及(10, 8)代入 $y=a(x-h)^2+k$
$$\begin{cases} ah^2+k=5..........(1) \\ a(10-h)^2+k=8..(2) \end{cases}$$
由(2)→$a(100-20h+h^2)+k=8$
$\therefore 100a-20ah+ah^2+k=8.....(3)$
(3)-(1)→$100a-20ah=3$
$20a(5-h)=3$
$\because a<0$，$5-h<0$，$h>5$
$\therefore 5<h<10$，選 B。

4. 若拋物線 $y=a(x-2)^2-8$ 最低點為 A，與 x 軸交於 B、C 兩點，若$\triangle ABC$ 的面積為 24，求 a=? (A)$\frac{2}{9}$ (B)$\frac{4}{9}$ (C)$\frac{8}{9}$ (D)$\frac{10}{9}$

<解析>
$\triangle ABC=\frac{2a\times8}{2}=24$，$8a=24$，$a=3$
$C(2+3, 0)=(5, 0)$
令 $y=a(x-2)^2-8$，將(5, 0)代入
$\therefore 9a-8=0\rightarrow a=\frac{8}{9}$，選 C。



5. 右圖的$\triangle ABC$中，扇形ODE的O、D兩點均在$\overline{BC}$上，E在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$切$\overset{\frown}{AB}$的F點。若$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BC}=6$，$\angle EOB=90°$，$\overline{OF}=3$，則$\overline{BO}$的長度為何? (A)$\frac{9}{4}$ (B)$\frac{9}{2}$ (C)$\frac{7}{4}$ (D)$\frac{7}{2}$



<解析>

$\because \angle BOE=90°=\angle CFO$，$\angle B=\angle C$，$\overline{OE}=\overline{OF}=3$

$\therefore \triangle BOE \cong \triangle CFO$($AAS$全等)

設$\overline{BO}=x$，則$\overline{CO}=6-x$，$\overline{CF}=x$

$\triangle CFO$中，$\overline{CO}^2=\overline{CF}^2+\overline{OF}^2$

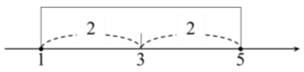
$\therefore (6-x)^2=x^2+3^2$，$36-12x+x^2=x^2+9$

$12x=27$，$x=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$，選A。

6. 若$|ax+6|\leq b$的解為$1\leq x\leq 5$，則數對(a, b)=_____。

(A) (-2, 4) (B) (2, -4) (C) (-2, -4) (D) (2, 4)

<解析>



$\rightarrow |x-3|\leq 2 \rightarrow |2x-6|\leq 4$

$|-2x+6|\leq 4 \rightarrow (a, b)=(-2, 4)$，選A。

7. 若多項式$f(x)$除以x^3-1得餘式$2x^2-3x+4$，則$f(x)$除以x^2+x+1的餘式為____。

(A)$-3x+2$ (B)$-5x+2$ (C)$3x-2$ (D)$5x-2$

<解析>

$f(x)=(x^3-1)q(x)+2x^2-3x+4=\underbrace{(x-1)(x^2+x+1)q(x)}_{\text{被}x^2+x+1\text{整除}}+2x^2-3x+4$

$\therefore 2x^2-3x+4=2(x^2+x+1)+(-5x+2)$

選B。

8. 觀察數列$\frac{1}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{4}{4}$、$\frac{1}{5}$、.....的規律，則$\frac{13}{29}$為第幾項?

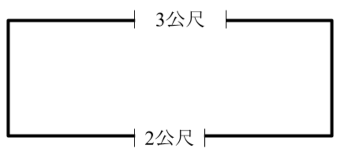
(A)419 (B)420 (C)421 (D)422

<解析>

$\frac{1}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{3}$、.....、$\frac{28}{28}$，共$1+2+3+4+\ldots+28=\frac{28\times 29}{2}=406$項

$\therefore \frac{1}{29}$、$\frac{2}{29}$、$\frac{3}{29}$、......、$\frac{13}{29}$ $\therefore \frac{13}{29}$為419項，選A。

9. 如右圖，農夫<u>老黃</u>想95公尺長的竹籬笆圍成一長方形菜圃，並在其中兩邊各留著寬3公尺與2公尺的出入口，<u>老黃</u>則所能圍成之長方形最大面積為____平方公尺。



(A)525 (B)600 (C)625 (D)650

<解析>

設長方形菜圃的寬x公尺，長y公尺

$\rightarrow (x-3)+(x-2)+y+y=95$，$x+y=50$

利用算幾不等式，$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$，$\frac{50}{2}\geq\sqrt{xy}$，$xy\leq 625$

所求最大面積為625平方公尺，選C。

10. Assuming n is a natural number, the maximum n value that satisfies $\sqrt{73+\sqrt{n}}<10$ is ____.
(A)725 (B)726 (C)727 (D)728

<解析>

$\sqrt{73+\sqrt{n}}<10 \rightarrow 73+\sqrt{n}<100$，$\sqrt{n}<27$

$\therefore n<27^2=729$

則最大自然數 $n=728$，選 D。

11. 設 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，若 $f(a)=6$，則 $f(2a)=$ ____ 。(A)12 (B)24 (C)31 (D)71

<解析>

$f(a)=\dfrac{2^a+2^{-a}}{2}=6$，$2^a+2^{-a}=12$

$\because (2^a+2^{-a})^2=(2^a)^2+2+(2^{-a})^2$

$\therefore 12^2=2^{2a}+2^{-2a}+2 \Rightarrow 2^{2a}+2^{-2a}=142$

則 $f(2a)=\dfrac{2^{2a}+2^{-2a}}{2}=\dfrac{142}{2}=71$，選 D。

12. 設實數 x、y 均大於 0，且 $2^x=3^y=6^{xy}$，則 $x+y=$ ____ 。(A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{1}{3}$ (C)$\frac{5}{6}$ (D)1

<解析>

$\begin{cases} 2^x=6^{xy} \\ 3^y=6^{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=6^y \ldots\text{(1)} \\ 3=6^x \ldots\text{(2)} \end{cases}$

由(1)×(2)得 $2\cdot 3=6^x\cdot 6^y$，$6=6^{x+y}$

$\therefore x+y=1$，選 D。

13. 某都市 t 年時的人口數為 $p\times 10^6$ 人，且年份和 p 值的關係式為 $p=5\cdot 2^{\frac{t-2001}{15}}$，試問此都市的人口數何時變成 2006 年人口數的 2 倍?
(A)2017 年 (B)2019 年 (C)2021 年 (D)2023 年

<解析>

2006 年的人口數$=5\cdot 2^{\frac{2006-2001}{15}}=5\cdot 2^{\frac{1}{3}}$

當 n 年時人口數的 2 倍 $\Rightarrow 5\cdot 2^{\frac{n-2001}{15}}=2\times(5\cdot 2^{\frac{1}{3}})$，$2^{\frac{n-2001}{15}}=2^{\frac{4}{3}}$

$\dfrac{n-2001}{15}=\dfrac{4}{3}$，$n=2021$，選 C。

14. 設平面一點 $A(1, 1)$，若 $\overline{AB}$ 之中垂線之方程式為 $x+2y-8=0$，則 $\overline{AB}$ 的中點坐標為 ______ 。 (A)(2, 3) (B)(2, 2) (C)(3, 1) (D)(1, 4)

<解析>

$x+2y-8=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+4$，斜率$=-\frac{1}{2}$

則直線 AB 的斜率=2

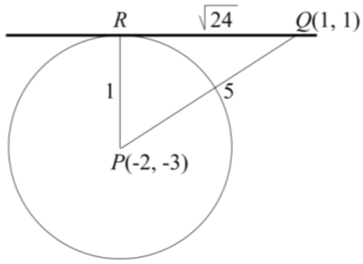
其方程式 $y-1=2(x-1)$，$y=2x-1$

$\begin{cases} y=2x-1 \\ x+2y-8=0 \end{cases}$，$x+4x-2-8=0$，$5x=10$，$x=2$，$y=2\times 2-1=3$

中點坐標為(2, 3)，選 A。

15. Let P be the center of circle $(x+2)^2+(y+3)^2=1$. Draw a tangent line to the circle from a point $Q(1, 1)$ outside the circle. The tangent point is R. What is the area of triangle PQR?

(A)6　(B)$\sqrt{6}$　(C)$2\sqrt{6}$　(D)$3\sqrt{6}$



<解析>

圓心 $P(-2, -3)$，$\overline{PQ}=\sqrt{(-2-1)^2+(-3-1)^2}=5$

$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2$，$25=1+\overline{RQ}^2$，$\overline{RQ}=\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}$

則△PQR 的面積$=1\times\sqrt{24}\times\frac{1}{2}=\sqrt{6}$，選 B。

16. 已知$\log2\approx0.3010$，求 2^{56} 為______位數。

(A)28 (B)20 (C)16 (D)17

<解析>

$2^{56}=(10^{\log2})^{56}\approx10^{56\log2}=10^{16.856}$

$\Rightarrow 10^6<2^{56}<10^{17}$，故 2^{56} 為 17 位數，選 D。

17. 設 $A=\sqrt{7}-\sqrt{6}$，$B=\sqrt{6}-\sqrt{5}$，$C=\sqrt{5}-2$，則 A、B、C 之大小關係為______。

(A)$C>B>A$　(B)$C>A>B$　(C)$A>B>C$　(D)$B>C>A$

<解析>

$A=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{1}=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$

$B=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{1}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

$C=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{1}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{4})(\sqrt{5}+\sqrt{4})}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$

$\therefore C>B>A$，選 A。

18. 設 $f(x)=\frac{3}{2}x^5-\frac{3}{2}x^4-\frac{1}{2}x^3+x^2+1$，則 $f(1)-f(-1)$的值等於下列哪一個選項?

(A)-2 (B)0 (C)2 (D)4

<解析>

$$\begin{array}{rl} & f(1)=\frac{3}{2}\cdot1^5-\frac{3}{2}\cdot1^4-\frac{1}{2}\cdot1^3+1^2+1 \\ -) & f(-1)=\frac{3}{2}\cdot(-1)^5-\frac{3}{2}\cdot(-1)^4-\frac{1}{2}\cdot(-1)^3+(-1)^2+1 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore f(1)-f(-1)=2\cdot(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})=2\times1=2$，選 C。

19. 已知$\frac{xy+xz}{x+y+z}=2$，$\frac{yz+xy}{x+y+z}=3$，$\frac{xz+yz}{x+y+z}=4$，則$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=$______。(A)1　(B)2　(C)$\frac{3}{2}$　(D)$\frac{5}{2}$

<解析>

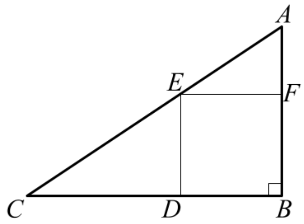
$\frac{xy+xz}{x+y+z}=2\rightarrow\frac{x(y+z)}{x+y+z}=\frac{2}{1}$，$\frac{y+z}{x+y+z}=\frac{2}{x}\ldots(1)$

$\frac{yz+xy}{x+y+z}=3\rightarrow\frac{y(z+x)}{x+y+z}=\frac{3}{1}$，$\frac{z+x}{x+y+z}=\frac{3}{y}\ldots(2)$

$\frac{xz+yz}{x+y+z}=4\rightarrow\frac{z(x+y)}{x+y+z}=\frac{4}{1}$，$\frac{x+y}{x+y+z}=\frac{4}{z}\ldots(3)$

(1)+(2)+(3)得: $\frac{2(x+y+z)}{x+y+z}=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{4}{z}$，$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=2$，選 B。

20. 如圖，直角△ABC 中，已知∠B=90°，D 點在$\overline{BC}$上，E 點在$\overline{AC}$上，F 點在$\overline{AB}$上，若四邊形 $BDEF$ 為正方形，且$\overline{AB}$=6，$\overline{BC}$=8，則正方形 $BDEF$ 邊長為何? (A)$\frac{20}{7}$ (B)$\frac{22}{7}$ (C)$\frac{24}{7}$ (D)$\frac{26}{7}$



<解析>

∵$\overline{EF}//\overline{BC}$且四邊形 $BDEF$ 為正方形

∴$\overline{AF}:\overline{AB}=\overline{EF}:\overline{BC}$

設正方形 $BDEF$ 邊長為 x

➔$(6-x):6=x:8$

$6x=48-8x$

$14x=48$

$x=\frac{48}{14}=\frac{24}{7}$，選 C。

21. If a=9874x9877, b=9875x9876, which of the following is correct?

(A)$a>b$ (B)$a<b$ (C)$a=b$ (D)$b-a=3$

<解析>

當 2x3=6，1x4=4，兩數和固定，相乘兩數之差越小，其乘積越大

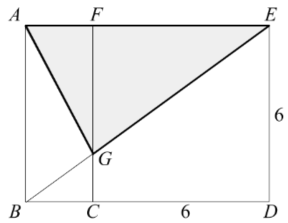
則 a=9874x9877，b=9875x9876，$a<b$，選 B。

<另解>

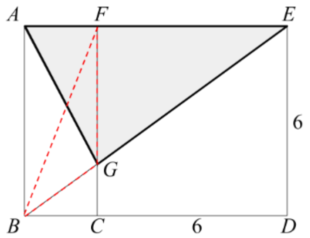
令 $x=9875$，$a=(x-1)(x+2)=x^2+x-2$

$b=x(x+1)=x^2+x$，則 $b>a$，且 $b-a=(x^2+x)-(x^2+x-2)=2$

22. As shown in the figure, the quadrilateral $ABDE$ is a rectangle and the quadrilateral $FCDE$ is a square. $\overline{CD}=\overline{DE}$=6 cm, then what is the area of the colored triangle AGE in square centimeters? (A)12 (B)14 (C)16 (D)18



<解析>



△AFG=△BFG(等底底高)

則△AGE=△FBE=$\overline{FE}$x$\overline{AB}$÷2=6x6÷2=18，選 D。

23. 計算$\frac{1\times2\times3+2\times4\times6+3\times6\times9+\ldots+2000\times4000\times6000}{3\times4\times5+6\times8\times10+9\times12\times15+\ldots+6000\times8000\times10000}$=? (A)$\frac{1}{10}$ (B)$\frac{1}{100}$ (C)$\frac{1}{1000}$ (D)$\frac{1}{27}$

<解析>

$\frac{1\times2\times3}{3\times4\times5}=\frac{1}{10}$

$\frac{1\times2\times3+2\times4\times6}{3\times4\times5+6\times8\times10}=\frac{6+48}{60+480}=\frac{6+48}{10(6+48)}=\frac{1}{10}$，其值=$\frac{1}{10}$

原式=$\frac{1\times2\times3\times(1^3+2^3+3^3+\ldots+2000^3)}{3\times4\times5\times(1^3+2^3+3^3+\ldots+2000^3)}=\frac{1\times2\times3}{3\times4\times5}=\frac{1}{10}$，選 A。

24. How many zeros will appear in the product of $\underbrace{999\ldots999}_{100\text{ 個 }9}\times\underbrace{999\ldots999}_{100\text{ 個 }9}$? (中間有幾個 0)

(A)97 (B)98 (C)99 (D)100

<解析>

9x9=81→0 個 0

99x99=9801→1 個 0

999x999=998001→2 個 0

……

原式→99 個 0，選 C。

<另解>

$(10^{100}-1)\times(10^{100}-1)=10^{200}-2\times10^{100}+1=\underbrace{999\ldots9}_{99\text{ 個 }9}8\underbrace{0000\ldots0}_{99\text{ 個 }0}1$→200 位數

25. 甲、乙、丙三個人各有若干元，首先甲給乙、丙每人現有錢數的 2 倍，接著由乙給甲、丙每人現有的錢數的 2 倍，最後丙給甲、乙每人現有的錢數的 2 倍，結果三人錢數相同。若原來丙有 70 元，則甲原來有多少元? (A)220 (B)330 (C)440 (D)550

<解析>

	甲	乙	丙
結果	27	27	27
丙給甲、乙之前	27÷(1+2)=9	27÷(1+2)=9	81-9-9=63
乙給甲、丙之前	9÷(1+2)=3	81-3-21=57	63÷(1+2)=21
甲給乙、丙之前	81-19-7=55	57÷(1+2)=19	21÷(1+2)=7

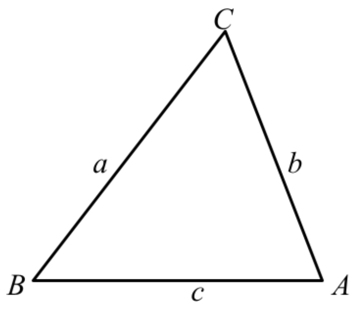
原來的甲:乙:丙=55:19:7

若丙原有 70 元，則甲原有 55x10=550 元，選 D。

二、計算題(25 分/25 分，共 50 分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. $\triangle ABC$ 三邊長 a、b、c，且 $s=\frac{a+b+c}{2}$，求證: $\triangle ABC$ 面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

<解析>



(1)作$\overline{CH}\perp\overline{AB}$於 H，令$\overline{AH}=x$，$\overline{BH}=c-x$，$\overline{CH}=h$

$a^2-x^2=h^2=b^2-(c-x)^2$

$a^2-x^2=b^2-(c^2-2cx+x^2)$

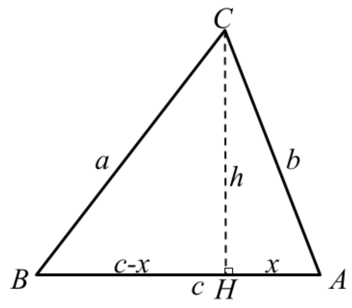
$x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$

(2)$h=\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2}=\sqrt{\left(a+\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)\left(a-\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)}$

$=\sqrt{\frac{(a+c)^2-b^2}{2c}\cdot\frac{b^2-(a-c)^2}{2c}}=\frac{\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}}{2c}$

(3)$2s=a+b+c$➔$2s-2b=a+b+c-2b$，$2s-2b=a+c-b$，$2s-2a=b+c-a$

(4)$\triangle ABC=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}c\times\frac{\sqrt{2s(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}}{2c}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$



2.通過(2, 7)的直線有無限多條，試求在第一象限與兩坐標軸所圍成之三角形面積最小時直線方程式為______。

<解析>

令過(2, 7)的直線為 L: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，且 a>0、b>0

$\because L$ 過(2, 7)

$\therefore \frac{2}{a}+\frac{7}{b}=1$，由算幾不等式得: $\frac{\frac{2}{a}+\frac{7}{b}}{2}\geq\sqrt{\frac{2}{a}\cdot\frac{7}{b}} \rightarrow \frac{1}{2}\geq\sqrt{\frac{14}{ab}}$，$\frac{1}{4}\geq\frac{14}{ab}$，$4\leq\frac{ab}{14}$，$28\leq\frac{ab}{2}$

則過(2, 7)的直線在第一象限與兩坐標所圍成最小三角形面積為 28

當$\frac{2}{a}=\frac{7}{b}=\frac{1}{2}$，即 $a=4$，$b=14$

故直線方程式為$\frac{x}{4}+\frac{y}{14}=1$，即 $7x+2y=28$