

第二十一屆  國際數學競賽台灣區初賽
21th International Mathematics Contest (Taiwan)

國中三年級組

考生姓名		試題	
准考證號碼		總分	

◎參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。

◎計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

選擇題答案區

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

考試時間:60 分鐘 卷面總分:300 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

1. The sum of the 11th to 27th terms of the arithmetic sequence is 170. What is the 19th term of the arithmetic sequence? (A)5 (B)10 (C)15 (D)20

<解析>

a_{19} 是 a_{11} 和 a_{27} 的等差中項 $\rightarrow a_{19} = \frac{a_{11} + a_{27}}{2}$

$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{19} + \dots + a_{26} + a_{27} = 170$

$\frac{17(a_{11} + a_{27})}{2} = 17 \times a_{19} = 170$

$\therefore a_{19} = 10$ ，選 B。

2. 若一正多邊形其一內角與外角的差為 120° ，此多邊形的邊數為？

(A)10 (B)12 (C)15 (D)18

<解析>

外角 + 內角 = 180，外角 - 內角 = 120

$(180 + 120) \div 2 = 150$ ， $(180 - 120) \div 2 = 30$

$360 \div 30 = 12$ ，選 B。

3. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ 且 $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$ ，則 $\angle A$ 為幾度？

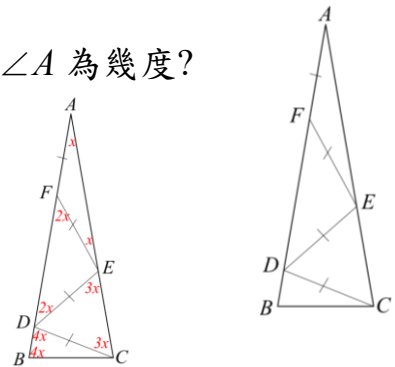
(A)40 (B)30 (C)20 (D)10

<解析>

設 $\angle A$ 是 x 度

則 $x + 4x + 4x = 180$ ， $x = 20$

選 C。



4. 下列哪一個選項，可以確定四邊形 $ABCD$ 必為平行四邊形？

(A) $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{AB} = \overline{CD}$

(B) $\overline{AB} = \overline{CD}$ 且 $\overline{AC} = \overline{BD}$

(C) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 \overline{AC} 平分 \overline{BD}

(D) $\angle B = \angle D$ 且 \overline{AC} 平分 \overline{BD}

<解析>

(A)和(B)可能是等腰梯形

(D)可能是箏形

選 C。

5. 如右圖，點 P 為圓 O 外一點，過 P 作 \overline{PA} 、 \overline{PB} 分別切圓 O 於 A 、 B 兩點， $\angle APB = 30^\circ$ ，設 Q 為圓 O 上的一點，則 $\angle AQB = ?$

(A) 105° (B) 210° (C) 100° (D) 200°

<解析>

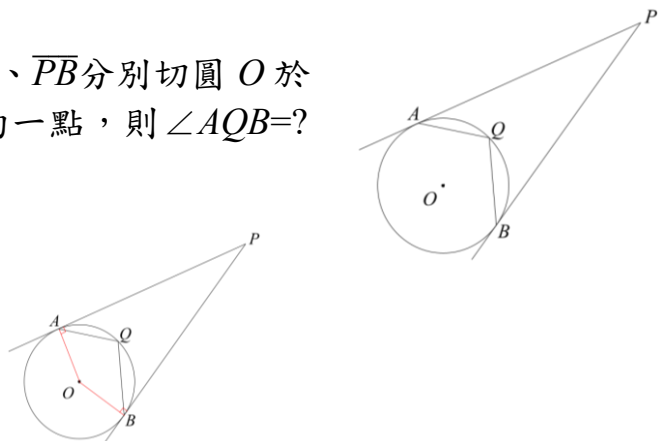
連接 \overline{OA} 、 \overline{OB}

$\rightarrow \overline{OA} \perp \overline{PA}$ ， $\overline{OB} \perp \overline{PB}$

四邊形 $OAPB$ 中， $\angle AOB = 360^\circ - 30^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 150^\circ$

$\rightarrow \widehat{AQB} = 150^\circ$ ， $\widehat{AB} = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$

$\angle AQB = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \frac{1}{2} \times 210^\circ = 105^\circ$ ，選 A。



6. 若多項式 $f(x)$ 除以 x^3-1 得餘式為 $2x^2-3x+4$ ，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為?
 (A) $-3x+2$ (B) $-5x+2$ (C) $3x-2$ (D) $5x-2$

<解析>

$$f(x) = (x^3-1)q(x) + 2x^2-3x+4 = \underbrace{(x-1)(x^2+x+1)q(x)}_{\text{被 } x^2+x+1 \text{ 整除}} + 2x^2-3x+4$$

$$\therefore 2x^2-3x+4 = 2(x^2+x+1) + (-5x+2)$$

選 B。

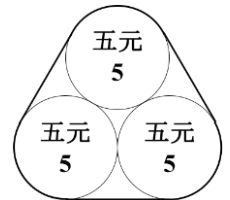
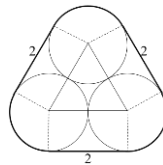
7. 將一條繩子緊緊圈住三個五元硬幣，如右圖所示，若五元硬幣的半徑是 1 公分，則圈住這三個硬幣的繩子長度是多少公分?

- (A) $6+2\pi$ (B) $6+4\pi$ (C) $8+2\pi$ (D) $8+4\pi$

<解析>

$$\text{圓心角: } 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\text{繩長} = 2 \times 3 + 1 \times 2 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 3 = 6 + 2\pi, \text{ 選 A。}$$



8. 觀察數列 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ 的規律，則 $\frac{13}{29}$ 為第幾項?

- (A) 419 (B) 420 (C) 421 (D) 422

<解析>

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots, \frac{28}{28}, \text{ 共 } 1+2+3+4+\dots+28 = \frac{28 \times 29}{2} = 406 \text{ 項}$$

$$\therefore \frac{1}{29}, \frac{2}{29}, \frac{3}{29}, \dots, \frac{13}{29} \therefore \frac{13}{29} \text{ 為 } 419 \text{ 項, 選 A。}$$

9. 有 120 張相同的正方形紙片，小悠先拿 8 張拼成一個 2×4 的長方形，如右圖，現在小悠想用剩下的紙片再拼成一個形狀是它的放大圖，試問小悠最多要用多少張正方形紙片?

- (A) 104 (B) 102 (C) 100 (D) 98

<解析>

$$120 - 8 = 112, \text{ 長:寬} = 4:2 = 2:1$$

$$\text{長邊} = 2a, \text{ 寬邊} = a$$

$$2axa \leq 112, a^2 \leq 56, a \text{ 最大取值} = 7$$

$$\text{故長邊} = 14, \text{ 寬邊} = 7, \text{ 最多用 } 14 \times 7 = 98 \text{ 張, 選 D。}$$



10. Assuming n is a natural number, the maximum n value that satisfies $\sqrt{73} + \sqrt{n} < 10$ is ____.

- (A) 725 (B) 726 (C) 727 (D) 728

<解析>

$$\sqrt{73} + \sqrt{n} < 10 \rightarrow 73 + \sqrt{n} < 100, \sqrt{n} < 27$$

$$\therefore n < 27^2 = 729$$

則最大自然數 $n = 728$ ，選 D。

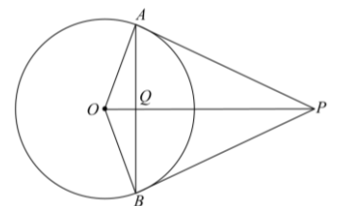
11. 如圖，圓 O 半徑為 10， P 為圓 O 外一點， \overline{PA} 、 \overline{PB} 分別切圓 O 於 A 、 B 二點，若 $\overline{OP} = 20$ ，則四邊形 $OAPB$ 面積為 ____。

- (A) $50\sqrt{3}$ (B) $100\sqrt{3}$ (C) $60\sqrt{3}$ (D) $120\sqrt{3}$

<解析>

$$\overline{AP} = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

$$10\sqrt{3} \times 10 \times \frac{1}{2} \times 2 = 100\sqrt{3}, \text{ 選 B。}$$



12. 設實數 x 、 y 均大於 0，且 $2^x=3^y=6^{xy}$ ，則 $x+y=$ _____。(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D)1

<解析>

$$\begin{cases} 2^x=6^{xy} \\ 3^y=6^{xy} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2=6^y \dots (1) \\ 3=6^x \dots (2) \end{cases}$$

由(1)×(2)得 $2 \cdot 3 = 6^x \cdot 6^y$ ， $6 = 6^{x+y}$

$\therefore x+y=1$ ，選 D。

13. 若甲、乙、丙、丁四人排成一行，求甲、乙相鄰的機率是_____。

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

<解析>

四人任意排列 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

甲乙相鄰 $3 \times 2 \times 1 \times 2 = 12$

機率 $= \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ ，選 A。

14. 在空間中不在同一平面兩直線叫做歪斜線；兩平行線必在同一平面，請問長方體的 12 條邊中有_____組歪斜線。(A)12 (B)16 (C)20 (D)24

<解析>

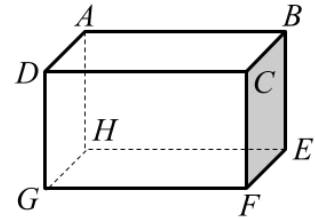
討論 \overline{AB} ，與 \overline{AB} 共平面的邊有 \overline{AD} 、 \overline{BC} 、 \overline{AH} 、 \overline{BE}

與 \overline{AB} 平行的邊有 \overline{CD} 、 \overline{HE} 、 \overline{GF}

故與 \overline{AB} 歪斜的邊有 \overline{DG} 、 \overline{GH} 、 \overline{CF} 、 \overline{EF} ，共 4 組

每一條邊有 4 組歪斜線

共有 $\frac{4 \times 12}{2} = 24$ ，選 D。



15. 如圖， $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}=12$ ， $\overline{BC}=6$ ， \overline{BE} 是 $\angle ABC$ 的平分線，且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\triangle ADE$ 的周長=? (A)16 (B)18 (C)20 (D)24

<解析>

① \overline{BE} 平分 $\angle ABC$ ，又 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$\therefore \angle DBC = \angle CBE = \angle DEB \rightarrow \overline{BD} = \overline{DE}$

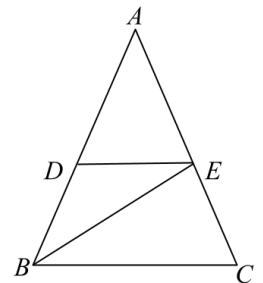
② 設 $\overline{DE} = x$ ，則 $\overline{BD} = x$ ， $\overline{AD} = 12 - x$

$\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

$\therefore \frac{\overline{DA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \rightarrow \frac{12-x}{12} = \frac{x}{6}$ ， $12-x=2x$ ， $x=4$

$\therefore \overline{DE}=4$ ， $\overline{AD}=12-4=8$

$\triangle ADE$ 的周長 $= 8+4+8=20$ ，選 C。



16. 設 $A=\sqrt{7}-\sqrt{6}$ ， $B=\sqrt{6}-\sqrt{5}$ ， $C=\sqrt{5}-2$ ，則 A 、 B 、 C 之大小關係為_____。

(A) $C>B>A$ (B) $C>A>B$ (C) $A>B>C$ (D) $B>C>A$

<解析>

$$A = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{1} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$$

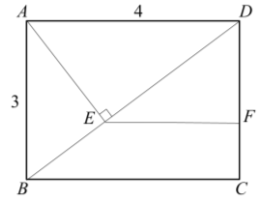
$$B = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{1} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$$

$$C = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{1} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{4})(\sqrt{5}+\sqrt{4})}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$$

$\therefore C>B>A$ ，選 A。

17. 如右圖，矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=3$ ， $\overline{AD}=4$ ， \overline{AE} 垂直 \overline{BD} 於 E 點， \overline{EF} 垂直 \overline{DC} 於 F 點，則

$$\overline{EF} = \underline{\hspace{2cm}} \circ \text{(A)} \frac{64}{15} \quad \text{(B)} \frac{64}{25} \quad \text{(C)} \frac{64}{35} \quad \text{(D)} \frac{64}{45}$$



<解析>

$$\textcircled{1} \overline{BD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \text{ 斜邊上的高 } \overline{AE} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \overline{DE} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{16}{5}$$

$$\textcircled{2} \overline{EF} \parallel \overline{BC} \rightarrow \frac{\overline{DE}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}, \frac{\frac{16}{5}}{5} = \frac{\overline{EF}}{4}, \overline{EF} = \frac{64}{25}, \text{ 選 B.}$$

18. 設 $f(x) = \frac{3}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 + 1$ ，則 $f(1) - f(-1)$ 的值等於下列哪一個選項？

(A)-2 (B)0 (C)2 (D)4

<解析>

$$f(1) = \frac{3}{2} \cdot 1^5 - \frac{3}{2} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot 1^3 + 1^2 + 1$$

$$\text{.) } f(-1) = \frac{3}{2} \cdot (-1)^5 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 1$$

$$\therefore f(1) - f(-1) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times 1 = 2, \text{ 選 C.}$$

19. 已知 $\frac{xy+xz}{x+y+z} = 2$ ， $\frac{yz+xy}{x+y+z} = 3$ ， $\frac{xz+yz}{x+y+z} = 4$ ，則 $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(A)1 (B)2 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$

<解析>

$$\frac{xy+xz}{x+y+z} = 2 \rightarrow \frac{x(y+z)}{x+y+z} = \frac{2}{1}, \frac{y+z}{x+y+z} = \frac{2}{x} \dots (1)$$

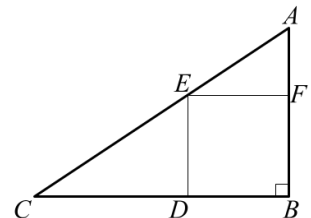
$$\frac{yz+xy}{x+y+z} = 3 \rightarrow \frac{y(z+x)}{x+y+z} = \frac{3}{1}, \frac{z+x}{x+y+z} = \frac{3}{y} \dots (2)$$

$$\frac{xz+yz}{x+y+z} = 4 \rightarrow \frac{z(x+y)}{x+y+z} = \frac{4}{1}, \frac{x+y}{x+y+z} = \frac{4}{z} \dots (3)$$

$$(1)+(2)+(3) \text{ 得: } \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z}, \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = 2, \text{ 選 B.}$$

20. 如圖，直角 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B = 90^\circ$ ， D 點在 \overline{BC} 上， E 點在 \overline{AC} 上， F 點在 \overline{AB} 上，若四邊形 $BDEF$ 為正方形，且 $\overline{AB} = 6$ ，

$\overline{BC} = 8$ ，則正方形 $BDEF$ 邊長為何？(A) $\frac{20}{7}$ (B) $\frac{22}{7}$ (C) $\frac{24}{7}$ (D) $\frac{26}{7}$



<解析>

$\therefore \overline{EF} \parallel \overline{BC}$ 且四邊形 $BDEF$ 為正方形

$$\therefore \overline{AF} : \overline{AB} = \overline{EF} : \overline{BC}$$

設正方形 $BDEF$ 邊長為 x

$$\rightarrow (6-x) : 6 = x : 8$$

$$6x = 48 - 8x$$

$$14x = 48, x = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}, \text{ 選 C.}$$

21. If $a = 9874 \times 9877$, $b = 9875 \times 9876$, which of the following is correct?

(A) $a > b$ (B) $a < b$ (C) $a = b$ (D) $b - a = 3$

<解析>

當 $2 \times 3 = 6$ ， $1 \times 4 = 4$ ，兩數和固定，相乘兩數之差越小，其乘積越大

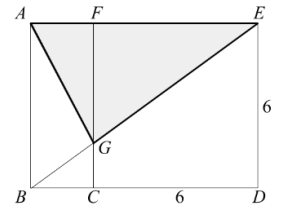
則 $a = 9874 \times 9877$ ， $b = 9875 \times 9876$ ， $a < b$ ，選 B。

<另解>

$$\text{令 } x = 9875, a = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$$

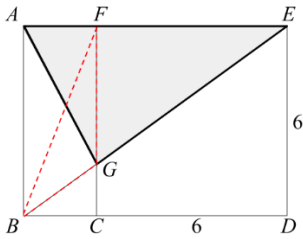
$$b = x(x+1) = x^2 + x, \text{ 則 } b > a, \text{ 且 } b - a = (x^2 + x) - (x^2 + x - 2) = 2$$

22. As shown in the figure, the quadrilateral $ABDE$ is a rectangle and the quadrilateral $FCDE$ is a square. $\overline{CD}=\overline{DE}=6$ cm, then what is the area of the colored triangle AGE in square centimeters?



(A)12 (B)14 (C)16 (D)18

<解析>



$\triangle AFG = \triangle BFG$ (等底底高)

則 $\triangle AGE = \triangle FBE = \overline{FE} \times \overline{AB} \div 2 = 6 \times 6 \div 2 = 18$ ，選 D。

23. 計算 $\frac{1 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 6 + 3 \times 6 \times 9 + \dots + 2000 \times 4000 \times 6000}{3 \times 4 \times 5 + 6 \times 8 \times 10 + 9 \times 12 \times 15 + \dots + 6000 \times 8000 \times 10000} = ?$ (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{100}$ (C) $\frac{1}{1000}$ (D) $\frac{1}{27}$

<解析>

$$\frac{1 \times 2 \times 3}{3 \times 4 \times 5} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 6} = \frac{6+48}{60+480} = \frac{6+48}{10(6+48)} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1 \times 2 \times 3}{3 \times 4 \times 5} = \frac{1}{10}$$

$$\text{原式} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2000^3)}{3 \times 4 \times 5 \times (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2000^3)} = \frac{1 \times 2 \times 3}{3 \times 4 \times 5} = \frac{1}{10}$$
，選 A。

24. How many zeros will appear in the product of $\underbrace{999 \dots 999}_{100 \text{ 個 } 9} \times \underbrace{999 \dots 999}_{100 \text{ 個 } 9}$? (中間有幾個 0)

(A)97 (B)98 (C)99 (D)100

<解析>

$$9 \times 9 = 81 \rightarrow 0 \text{ 個 } 0$$

$$99 \times 99 = 9801 \rightarrow 1 \text{ 個 } 0$$

$$999 \times 999 = 998001 \rightarrow 2 \text{ 個 } 0$$

.....

$$\text{原式} \rightarrow 99 \text{ 個 } 0$$
，選 C。

<另解>

$$(10^{100} - 1) \times (10^{100} - 1) = 10^{200} - 2 \times 10^{100} + 1 = \underbrace{999 \dots 9}_{99 \text{ 個 } 9} \underbrace{80000 \dots 0}_{99 \text{ 個 } 0} 1 \rightarrow 200 \text{ 位數}$$

25. 甲、乙、丙三個人各有若干元，首先甲給乙、丙每人現有錢數的 2 倍，接著由乙給甲、丙每人現有的錢數的 2 倍，最後丙給甲、乙每人現有的錢數的 2 倍，結果三人錢數相同。若原來丙有 70 元，則甲原來有多少元? (A)220 (B)330 (C)440 (D)550

<解析>

	甲	乙	丙
結果	27	27	27
丙給甲、乙之前	$27 \div (1+2) = 9$	$27 \div (1+2) = 9$	$81 - 9 - 9 = 63$
乙給甲、丙之前	$9 \div (1+2) = 3$	$81 - 3 - 21 = 57$	$63 \div (1+2) = 21$
甲給乙、丙之前	$81 - 19 - 7 = 55$	$57 \div (1+2) = 19$	$21 \div (1+2) = 7$

原來的甲:乙:丙=55:19:7

若丙原有 70 元，則甲原有 $55 \times 10 = 550$ 元，選 D。

二、計算題(25分/25分，共50分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. 1. 如圖 $\triangle ABC$ 三邊長 a 、 b 、 c ，且 $s = \frac{a+b+c}{2}$ ， $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ 於 H ，設 $\overline{BH} = x$ ， $\overline{CH} = h$

(1) x 以 a 、 b 、 c 表示

(2) 求證： $\triangle ABC$ 面積 $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

<解析>

(1) $\overline{AH} = c - x$

$$a^2 - x^2 = h^2 = b^2 - (c-x)^2$$

$$a^2 - x^2 = b^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$$

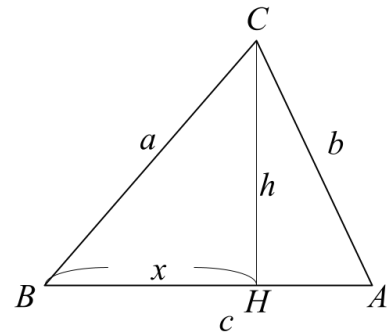
$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

$$(2) h = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2} = \sqrt{\left(a + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)\left(a - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+c)^2 - b^2}{2c} \cdot \frac{b^2 - (a-c)^2}{2c}} = \frac{\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}}{2c}$$

$$2s = a+b+c \rightarrow 2s-2b = a+b+c-2b, 2s-2b = a+c-b, 2s-2a = b+c-a$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} c \times \frac{\sqrt{2s(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}}{2c} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



2. 如圖梯形 $ABCD$ ， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， \overline{EF} 把梯形 $ABCD$ 切成兩個面積相等的梯形甲、乙，求 $\overline{EF} = ?$

<解析>

① 作 \overline{BA} 及 \overline{CD} 交於 P 點，且 $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \rightarrow \triangle PAD \sim \triangle PBC$

$$\overline{AD} = 1, \overline{BC} = 2 \therefore \triangle PAD : \triangle PBC = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$$

$$\triangle PAD : \text{甲} : \text{乙} = 1 : 1.5 : 1.5 = 2 : 3 : 3$$

② $\overline{EF} \parallel \overline{BC} \therefore \triangle PAD \sim \triangle PEF$ 且 $\triangle PAD : \triangle PEF = 2 : 5$

$$\rightarrow \overline{AD} : \overline{EF} = \sqrt{2} : \sqrt{5}$$

$$1 : \overline{EF} = \sqrt{2} : \sqrt{5}, \overline{EF} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

