

第二十一屆 國際數學競賽台灣區初賽

21th International Mathematics Contest (Taiwan)

國中二年級組

考生姓名		試題	
准考證號碼		總分	

◎參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。

◎計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

選擇題答案區

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

考試時間:60 分鐘 卷面總分:300 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

1. 化簡 $\frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}=?$ (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $-\sqrt{2}$ (D) $-\sqrt{3}$

<解析>

原式 = $\frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-4\sqrt{3}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(3+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ ，選 B。

2. 細菌每 20 分鐘分裂一次，每一隻細菌每次分裂成 2 隻，今盒中有 3 隻細菌，經過 100 分鐘後，盒中的細菌有多少隻? (A)15 (B)30 (C)48 (D)96

<解析>

100÷20=5...分裂五次
 $3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$ ，選 D。

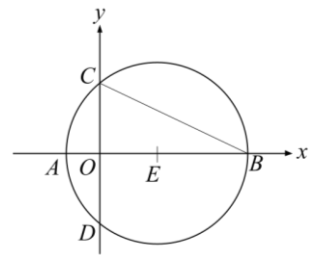
3. 計算 $\frac{1997^3+5 \times 1997^2+6 \times 1997}{1997^2+3994}=?$ (A)200 (B)4000 (C)100 (D)2000

<解析>

令 $x=1997$

原式 = $\frac{x^3+5x^2+6x}{x^2+2x} = \frac{x(x^2+5x+6)}{x(x+2)} = \frac{x(x+2)(x+3)}{x(x+2)} = x+3 = 1997+3 = 2000$ ，選 D。

4. 如右圖，圓心 E 的坐標是(3, 0)，半徑是 4 的圓交 x 軸於 A 、 B ，交 y 軸於 C 、 D ，則 $\overline{BC}=?$ (A) $2\sqrt{14}$ (B) $\sqrt{14}$ (C) $2\sqrt{7}$ (D) $\sqrt{7}$



<解析>

$\because \overline{CE}=4$ ，則 $\overline{OC}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

且 $\overline{OB}=3+4=7$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{7^2+(\sqrt{7})^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$ ，選 A。

5. 若 $(x^3-5x^2+1)+(ax^3+bx^2+x-1)=-x^2+x+c$ ，則 $a-b-c=?$ (A)5 (B)-5 (C)4 (D)-4

<解析>

$x^3-5x^2+1+ax^3+bx^2+x-1=-x^2+x+c$

$ax^3+bx^2-c=-x^2+x-x^3+5x^2-x$

$ax^3+bx^2-c=-x^3+4x^2$

$\therefore a=-1, b=4, c=0$ ，選 B。

6. The value after the product of $(2x^2-3x+a)(2x-5)$, the coefficient of the x term is 19, the sum of the coefficients of each term is _____. (A)2 (B)-2 (C)-3 (D)3

<解析>

$15+2a=19, a=2$

令 $x=1$ 代入 $(2x^2-3x+2)(2x-5)$

\therefore 係數和 = $(2-3+2)(2-5)=-3$ ，選 C。

7. 已知 65.4 公克的鋅，約含有 6×10^{23} 個鋅原子，請問 130.8 公克的鋅，大約含有多少個鋅原子？(以科學記號表示) (A) 1.2×10^{22} (B) 1.2×10^{23} (C) 1.2×10^{24} (D) 1.2×10^{25}

<解析>

$$130.8 \div 65.4 = 2$$

$$6 \times 10^{23} \times 2 = 1.2 \times 10^{24}$$

選 C。

8. 觀察數列 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ 的規律，則 $\frac{13}{29}$ 為第幾項？

(A)419 (B)420 (C)421 (D)422

<解析>

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots, \frac{28}{28}, \text{ 共 } 1+2+3+4+\dots+28 = \frac{28 \times 29}{2} = 406 \text{ 項}$$

$$\therefore \frac{1}{29}, \frac{2}{29}, \frac{3}{29}, \dots, \frac{13}{29} \therefore \frac{13}{29} \text{ 為 } 419 \text{ 項，選 A。}$$

9. 設甲、乙兩地相距 x 公里，小齊騎機車自甲地到乙地的速率是每小時 40 公里，由乙地到甲地的速率是每小時 60 公里，則小齊往返甲、乙兩地一趟的平均速率是每小時多少公里？(A)44 (B)48 (C)50 (D)55

<解析>

$$\text{來回一趟所需要的時間} = \frac{x}{40} + \frac{x}{60} = \frac{5x}{120} = \frac{x}{24}$$

$$\text{來回一趟的距離} = x + x = 2x$$

$$\text{則平均速率} = 2x \div \frac{x}{24} = 2x \times \frac{24}{x} = 48, \text{ 選 B。}$$

10. Assuming n is a natural number, the maximum n value that satisfies $\sqrt{73+\sqrt{n}} < 10$ is _____.

(A)725 (B)726 (C)727 (D)728

<解析>

$$\sqrt{73+\sqrt{n}} < 10 \rightarrow 73+\sqrt{n} < 100, \sqrt{n} < 27$$

$$\therefore n < 27^2 = 729$$

則最大自然數 $n=728$ ，選 D。

11. 已知坐標平面上， $3x-ay=4$ 和 $4x+5y=20$ 兩直線的交點在 y 軸上，則 $a=$ _____。

(A)1 (B)-1 (C)2 (D)-2

<解析>

y 軸上的點， x 坐標=0，

代入 $4x+5y=20 \rightarrow y=4$ ，故交點(0, 4)

(0, 4)代入 $3x-ay=4$

$$\therefore 0-4a=4, a=-1, \text{ 選 B。}$$

12. 若甲、乙、丙、丁四人排成一行，求甲、乙相鄰的機率是_____。

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

<解析>

四人任意排列 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

甲乙相鄰 $3 \times 2 \times 1 \times 2 = 12$

機率 $= \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ ，選 A。

13. 已知 $\frac{xy+xz}{x+y+z} = 2$ ， $\frac{yz+xy}{x+y+z} = 3$ ， $\frac{xz+yz}{x+y+z} = 4$ ，則 $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} =$ _____。(A)1 (B)2 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{2}$

<解析>

$$\frac{xy+xz}{x+y+z} = 2 \rightarrow \frac{x(y+z)}{x+y+z} = \frac{2}{1}, \frac{y+z}{x+y+z} = \frac{2}{x} \dots (1)$$

$$\frac{yz+xy}{x+y+z} = 3 \rightarrow \frac{y(z+x)}{x+y+z} = \frac{3}{1}, \frac{z+x}{x+y+z} = \frac{3}{y} \dots (2)$$

$$\frac{xz+yz}{x+y+z} = 4 \rightarrow \frac{z(x+y)}{x+y+z} = \frac{4}{1}, \frac{x+y}{x+y+z} = \frac{4}{z} \dots (3)$$

$$(1)+(2)+(3) \text{ 得: } \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z}, \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = 2, \text{ 選 B。}$$

14. 在空間中不在同一平面兩直線叫做歪斜線；兩平行線必在同一平面，請問長方體的 12 條邊中有_____組歪斜線。(A)12 (B)16 (C)20 (D)24

<解析>

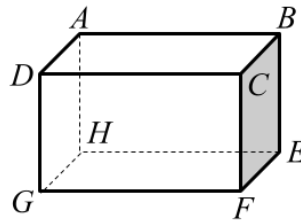
討論 \overline{AB} ，與 \overline{AB} 共平面的邊有 \overline{AD} 、 \overline{BC} 、 \overline{AH} 、 \overline{BE}

與 \overline{AB} 平行的邊有 \overline{CD} 、 \overline{HE} 、 \overline{GF}

故與 \overline{AB} 歪斜的邊有 \overline{DG} 、 \overline{GH} 、 \overline{CF} 、 \overline{EF} ，共 4 組

每一條邊有 4 組歪斜線

共有 $\frac{4 \times 12}{2} = 24$ ，選 D。



15. 小齊的撲滿中，有 1 元、5 元及 10 元硬幣共 56 枚，總金額為 341 元，已知 5 元和 10 元的枚數比為 3:5，則 1 元硬幣共有多少枚？(A)14 (B)15 (C)16 (D)17

<解析>

令 5 元與 10 元的枚數 $3r$ 、 $5r$ ，則 1 元有 $56 - (3r + 5r) = 56 - 8r$ 枚，且 $r \neq 0$

$$5 \times 3r + 10 \times 5r + 1 \times (56 - 8r) = 341$$

$$15r + 50r + 56 - 8r = 341$$

$$57r = 285, r = 5$$

則 1 元有 $56 - 8 \times 5 = 16$ ，選 C。

16. 計算 $\frac{51^2 - 102 \times 89 + 89^2}{51^2 - 89^2} =$ _____。(A) $\frac{19}{50}$ (B) $-\frac{19}{50}$ (C) $\frac{19}{70}$ (D) $-\frac{19}{70}$

<解析>

$$\text{原式} = \frac{(51-89)^2}{(51+89)(51-89)} = \frac{(51-89)}{(51+89)} = \frac{-38}{140} = -\frac{19}{70}, \text{ 選 D。}$$

17. 設 $A=\sqrt{7}-\sqrt{6}$, $B=\sqrt{6}-\sqrt{5}$, $C=\sqrt{5}-2$, 則 A 、 B 、 C 之大小關係為_____。

- (A) $C>B>A$ (B) $C>A>B$ (C) $A>B>C$ (D) $B>C>A$

<解析>

$$A = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{1} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$$

$$B = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{1} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$$

$$C = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{1} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{4})(\sqrt{5}+\sqrt{4})}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$$

∴ $C>B>A$, 選 A。

18. 已知直線方程式 $y=ax+b$, $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & -3 & -1 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ \hline y & c & 0 & d & e & f & g \end{array}$, 其中 $c>0$, 判斷下列四個式子,

- 哪一個是正確的? (A) $d<0$ (B) $e>0$ (C) $f<0$ (D) $g>f$

<解析>

$(-1, 0)$ 代入 $y=ax+b$, $0=-a+b \rightarrow a=b$

$(0, d)$ 代入 $y=ax+b$, $d=b$

$(-3, c)$ 代入 $y=ax+b$, $c=-3a+b=-2a$, ($c>0$)

∴ $a<0$, $a=b=d<0$, 選 A。

<另解>

$y=ax+b$ 直線通過 $(-3, \text{正})$ 與 $(-1, 0)$ 畫圖

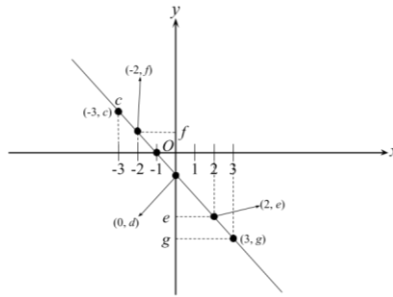
(A) $(0, d)$ 在 x 軸下方, $d<0$

(B) $(2, e)$ 在第四象限, $e<0$

(C) $(-2, f)$ 在第二象限, $f>0$

(D) $(3, g)$ 在 $(-2, f)$ 的下方, $g<f$

選 A。



19. 若 $x^3+ax+2=(x-1)^2(x+b)$, 則 ab 之值為_____。(A)-6 (B)0 (C)2 (D)6

<解析>

令 $x=1$, $1+a+2=0$, $a=-3 \rightarrow x^3-3+2=(x-1)^2(x+b)$

令 $x=2$, $8+2(-3)+2=1(2+b)$, $b=2$

則 $ab=(-3) \times 2 = -6$, 選 A。

20. 有一個三位數, 其百位、十位、個位數字分別為 1、 a 、 b , 若此數與 72 的最大公因數為 12, 則 $a+b$ 可能為何? (A)6 (B)11 (C)7 (D)10

<解析>

① $72=12 \times 6$

② $1ab=12 \times 11=132 \rightarrow a+b=3+2=5$

$=12 \times 12=144$

$=12 \times 13=156 \rightarrow a+b=5+6=11$

$=12 \times 14=168$

選 B。

21. If $a=9874 \times 9877$, $b=9875 \times 9876$, which of the following is correct?

- (A) $a > b$ (B) $a < b$ (C) $a = b$ (D) $b - a = 3$

<解析>

當 $2 \times 3 = 6$, $1 \times 4 = 4$, 兩數和固定, 相乘兩數之差越小, 其乘積越大
則 $a = 9874 \times 9877$, $b = 9875 \times 9876$, $a < b$, 選 B。

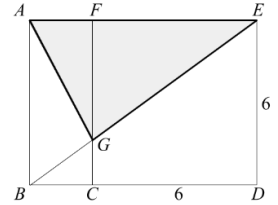
<另解>

令 $x = 9875$, $a = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$

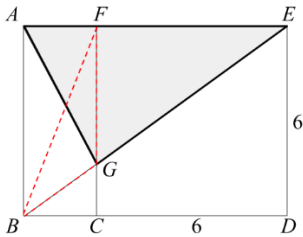
$b = x(x+1) = x^2 + x$, 則 $b > a$, 且 $b - a = (x^2 + x) - (x^2 + x - 2) = 2$

22. As shown in the figure, the quadrilateral $ABDE$ is a rectangle and the quadrilateral $FCDE$ is a square. $\overline{CD} = \overline{DE} = 6$ cm, then what is the area of the colored triangle AGE in square centimeters?

- (A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18



<解析>



$\triangle AFG = \triangle BFG$ (等底底高)

則 $\triangle AGE = \triangle FBE = \overline{FE} \times \overline{AB} \div 2 = 6 \times 6 \div 2 = 18$, 選 D。

23. 計算 $\frac{1 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 6 + 3 \times 6 \times 9 + \dots + 2000 \times 4000 \times 6000}{3 \times 4 \times 5 + 6 \times 8 \times 10 + 9 \times 12 \times 15 + \dots + 6000 \times 8000 \times 10000} = ?$ (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{100}$ (C) $\frac{1}{1000}$ (D) $\frac{1}{27}$

<解析>

$$\frac{1 \times 2 \times 3}{3 \times 4 \times 5} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 6}{3 \times 4 \times 5 + 6 \times 8 \times 10} = \frac{6 + 48}{60 + 480} = \frac{6 + 48}{10(6 + 48)} = \frac{1}{10}, \text{ 其值} = \frac{1}{10}$$

$$\text{原式} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2000^3)}{3 \times 4 \times 5 \times (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2000^3)} = \frac{1 \times 2 \times 3}{3 \times 4 \times 5} = \frac{1}{10}, \text{ 選 A。}$$

24. How many zeros will appear in the product of $\underbrace{999 \dots 999}_{100 \text{ 個 } 9} \times \underbrace{999 \dots 999}_{100 \text{ 個 } 9}$? (中間有幾個 0)

- (A) 97 (B) 98 (C) 99 (D) 100

<解析>

$$9 \times 9 = 81 \rightarrow 0 \text{ 個 } 0$$

$$99 \times 99 = 9801 \rightarrow 1 \text{ 個 } 0$$

$$999 \times 999 = 998001 \rightarrow 2 \text{ 個 } 0$$

.....

原式 $\rightarrow 99$ 個 0, 選 C。

<另解>

$$(10^{100} - 1) \times (10^{100} - 1) = 10^{200} - 2 \times 10^{100} + 1 = \underbrace{999 \dots 9}_{99 \text{ 個 } 9} 8 \underbrace{0000 \dots 0}_{99 \text{ 個 } 0} 1 \rightarrow 200 \text{ 位數}$$

25. 甲、乙、丙三個人各有若干元，首先甲給乙、丙每人現有錢數的 2 倍，接著由乙給甲、丙每人現有的錢數的 2 倍，最後丙給甲、乙每人現有的錢數的 2 倍，結果三人錢數相同。若原來丙有 70 元，則甲原來有多少元? (A)220 (B)330 (C)440 (D)550

<解析>

	甲	乙	丙
結果	27	27	27
丙給甲、乙之前	$27 \div (1+2) = 9$	$27 \div (1+2) = 9$	$81 - 9 - 9 = 63$
乙給甲、丙之前	$9 \div (1+2) = 3$	$81 - 3 - 21 = 57$	$63 \div (1+2) = 21$
甲給乙、丙之前	$81 - 19 - 7 = 55$	$57 \div (1+2) = 19$	$21 \div (1+2) = 7$

原來的甲:乙:丙=55:19:7

若丙原有 70 元，則甲原有 $55 \times 10 = 550$ 元，選 D。

二、計算題(25 分/25 分，共 50 分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. 如圖 $\triangle ABC$ 三邊長 a 、 b 、 c ，且 $s = \frac{a+b+c}{2}$ ， $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ 於 H ，設 $\overline{BH} = x$ ， $\overline{CH} = h$

(1) x 以 a 、 b 、 c 表示

(2) 求證: $\triangle ABC$ 面積 = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

<解析>

(1) $\overline{AH} = c - x$

$$a^2 - x^2 = h^2 = b^2 - (c-x)^2$$

$$a^2 - x^2 = b^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$$

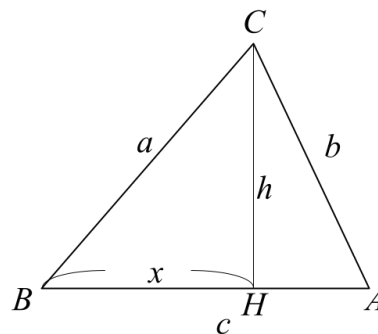
$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

$$(2) h = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2} = \sqrt{\left(a + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)\left(a - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+c)^2 - b^2}{2c} \cdot \frac{b^2 - (a-c)^2}{2c}} = \frac{\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}}{2c}$$

$$2s = a+b+c \rightarrow 2s-2b = a+b+c-2b, 2s-2b = a+c-b, 2s-2a = b+c-a$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} c \times \frac{\sqrt{2s(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}}{2c} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



2. 梨子有若干個裝箱，每箱 14 個，則餘 36 個；每箱裝 18 個，則最後一箱有裝但裝不滿，那麼梨子可能有多少個？

<解析>

假設有 x 個箱子，則梨子有 $14x+36$ 個

$$18(x-1) < 14x+36 < 18x$$

$$\textcircled{1} 18(x-1) < 14x+36$$

$$18x-18 < 14x+36$$

$$4x < 54, x < \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$$

$$\textcircled{2} 14x+36 < 18x$$

$$36 < 4x, 9 < x$$

$$\therefore 9 < x < \frac{27}{2}, x = 10, 11, 12, 13$$

\therefore 梨子可能有 176、190、204、218 個