2018 第十五屆IMC國際數學競賽 台灣區初賽

2018 Fifteenth International Mathematics Primary Contest(Taiwan)

高中二年級組

請將答案寫在答案卷上

一、選擇題 (每題 10 分，共 250 分)

(**C**)1.設 x 為正整數，將 $\sqrt{x}$ 的整數部分以 $f(x)$ 表示，則 $f(1)+f(2)+....+f(300)$ 最接近下列何數？(A) 2500(B) 3000(C) 3500(D) 4000。

解析：$\sqrt{1}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 的整數部分為 1，共 3 個

$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{8}$ 的整數部分為 2，共 5 個

$\sqrt{9}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{11}$，$\sqrt{12}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{14}$，$\sqrt{15}$ 的整數部分為 3，共 7 個

∴整數部分為 k 的數字各有 2k+1 個

$\sqrt{300}\approx 17.\cdots\cdots$，整數部分為 17

∴$\sqrt{289}$，$\sqrt{290}$，……，$\sqrt{300}$ 的整數部分為 17，共 12 個

∴f（1）+f（2）+……+f（300）

$=\sum_{k=1}^{16} k(2k+1)+12\times 17=2\cdot\frac{16\times17\times33}{6}+\frac{16\times17}{2}+204=3332$

選(C)。

(**C**)2. 設實數 x，y 滿足 $x^2-xy+y^2-2x=0$，若 y 的最佳範圍為 $a\leqq y\leqq b$，則 3a+2b 之值為(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 。

解析：$x^2-(y+2)x+y^2=0$

因為 $x\in R$，所以 $D=(y+2)^2-4y^2\geqq 0$

$\Rightarrow 3y^2-4y-4\leqq 0$

$\Rightarrow (y-2)(3y+2)\leqq 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}\leqq y\leqq 2$

故 $3a+2b=3\times\frac{-2}{3}+2\times2=-2+4=2$，故選(C)

(**B**)3.若[x]表小於或等於 x 的最大整數，則 $[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots\cdots+[\log_2 1024]=$？ (A)8192 (B)8204 (C)9218 (D)以上皆非。

解析：

$$[\log_2 N]=\begin{cases}1，當\ 2\leqq N<2^2\\ 2，當\ 2^2\leqq N<2^3\\ \vdots\\ 9，當\ 2^9\leqq N<2^{10}\\ 10，當\ N=2^{10}\end{cases}$$

$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots\cdots+[\log_2 1024]$

＝1·（22－2）＋2·（23－22）＋3·（24－23）＋……＋9·（210－29）＋10

＝9·210－（29＋28＋……＋2）＋10

＝9·210－（210－2）＋10＝8·210＋12

＝8x1024＋12＝8204，選 B。

(**C**)4.已知一數列首項為 1，且 $n\geqq 2$ 時，前 n 項的乘積為 n^2，則此數列第三項與第五項的和為下列何者？ (A)$\frac{25}{9}$ (B)$\frac{31}{15}$ (C)$\frac{61}{16}$ (D)$\frac{576}{225}$ 。

解析：

$a_3=\frac{a_1a_2a_3}{a_1a_2}=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$，$a_5=\frac{a_1a_2a_3a_4a_5}{a_1a_2a_3a_4}=\frac{5^2}{4^2}=\frac{25}{16}$

所以 $a_3+a_5=\frac{61}{16}$

故選(C) 。

(**D**)5. 設 n 為正偶數，則 $C_0^n+3^2C_2^n+3^4C_4^n+\cdots\cdots+3^nC_n^n=$

(A)2^{2n-1} (B)2^{2n+1} (C)$2^{n-1}+2^{n+1}$ (D)$2^{n-1}+2^{2n-1}$。

解析：

由二項式定理

（x＋y）n＝$C_0^nx^n+C_1^nx^{n-1}y+C_2^nx^{n-2}y^2+\cdots\cdots+C_n^ny^n$

x＝1，y＝3 代入 $4^n=C_0^n+3C_1^n+3^2C_2^n+\cdots\cdots+3^nC_n^n$……………①

x＝1，y＝－3 代入 $(-2)^n=C_0^n-3C_1^n+3^2C_2^n-\cdots\cdots+3^nC_n^n$……………②

①＋②得 $4^n+(-2)^n=2(C_0^n+3^2C_2^n+3^4C_4^n+\cdots\cdots+3^nC_n^n)$

又 n 為偶數 $\therefore C_0^n+3^2C_2^n+3^4C_4^n+\cdots\cdots+3^nC_n^n=2^{n-1}+2^{2n-1}$

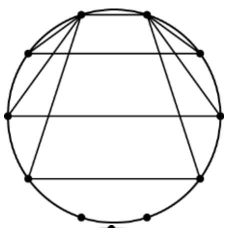
故選(D)

(**D**)6. 一圓周上有 10 個等分點，從這 10 個等分點中，選擇 4 個等分點為頂點構成一個四邊形，則此四邊形為梯形的機率為何？

(A)$\frac{8}{21}$ (B)$\frac{4}{21}$ (C)$\frac{1}{3}$ (D)$\frac{2}{7}$ 。

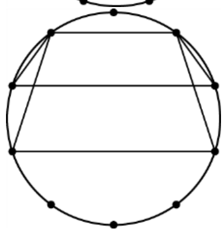
解析：

case 1：

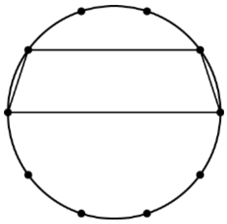


$\Rightarrow$ $\frac{10\cdot 3}{C_4^{10}}$

case 2：



$\Rightarrow$ $\frac{10\cdot 2}{C_4^{10}}$

case 3：  $\Rightarrow$ $\dfrac{10\cdot 1}{C_4^{10}}$

$\therefore \dfrac{10\cdot 3+10\cdot 2+10\cdot 1}{C_4^{10}}=\dfrac{2}{7}$

故選(D)

(**C**)7.某電影院第一排共有 9 個座位，現有 3 名觀眾就座。試問他們每兩人都不能相鄰且要求每人左右均至多只有兩個空位的機率？

(A)$\dfrac{8}{21}$ (B)$\dfrac{4}{21}$ (C)$\dfrac{2}{21}$ (D)$\dfrac{1}{7}$。

解析：

case 1：A (□□) B (□□) C (□□) $\Rightarrow 3!=6$

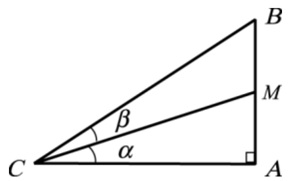
case 2：(□□) A (□□) B (□□) $C \Rightarrow 3!=6$

case 3：□ A (□□) B (□□) C □$\Rightarrow \dfrac{4!}{2!2!}\times 3!=36$

$\therefore$所求為$\dfrac{6+6+36}{9\times 8\times 7}=\dfrac{2}{21}$

故選(C)

(**B**)8. 如下圖，直角三角形ABC中，$\angle A=90^\circ$，$\overline{AM}=\overline{BM}$，$\angle ACM=\alpha$，$\angle BCM=\beta$，則下列何者為真？



(A)$\alpha=\beta$(B)$\sin\alpha>\sin\beta$(C)$\sin(\alpha+\beta)=\sin 2\alpha$(D)$2\tan\alpha=\tan 2\alpha$

解析：

(1)若$\alpha=\beta$，則$\overline{CM}$為$\angle ACB$之內角平分線

$\Rightarrow \overline{MA}:\overline{MB}=\overline{CA}:\overline{CB}$

又$\overline{CB}>\overline{CA}$，故$\overline{CA}:\overline{CB}\neq 1:1$

此與M為$\overline{AB}$之中點矛盾，故$\alpha\neq\beta$

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)\neq\sin 2\alpha$

亦即(A)、(C)皆錯誤

(2)考慮$\triangle CAM$

設$\angle CMA=\theta$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{MA}}{\sin\alpha}=\dfrac{\overline{CA}}{\sin\theta}\Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{\overline{MA}}{\overline{CA}}\sin\theta$

考慮$\triangle CBM$

$\because \angle CMA=\theta \quad \therefore \angle CMB=180^\circ-\theta$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{MB}}{\sin\beta} = \dfrac{\overline{CB}}{\sin(180°-\theta)}$

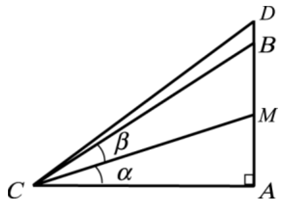
$\Rightarrow \sin\beta = \dfrac{\overline{MB}}{\overline{CB}}\sin\theta$

$\because \overline{CB} > \overline{CA} \quad \therefore \dfrac{1}{\overline{CB}} < \dfrac{1}{\overline{CA}}$

又 $\overline{MB} = \overline{MA} \Rightarrow \dfrac{\overline{MB}}{\overline{CB}}\sin\theta < \dfrac{\overline{MA}}{\overline{CA}}\sin\theta$

$\Rightarrow \sin\beta < \sin\alpha$　故(B)正確

(3)



在 $\overrightarrow{MB}$ 上取 D 使得 $\angle MCD = \alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$

$2\tan\alpha = 2\cdot\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} < \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \tan 2\alpha$，故(D)錯誤

(**B**)9. △ABC 中，$a^2\sin^2B + b^2\sin^2A = 2ab\cdot\cos A\cdot\cos B$，則△ABC 之形狀為
(A)等腰三角形　(B)直角三角形　(C)等腰直角三角形　(D)正三角形。

解析：

$a^2\sin^2B + b^2\sin^2A = 2ab\cdot\cos A\cdot\cos B$

$\Rightarrow a^2(1-\cos^2B) + b^2(1-\cos^2A) = 2ab\cdot\cos A\cdot\cos B$

$\Rightarrow a^2 - a^2\cos^2B + b^2 - b^2\cos^2A = 2ab\cdot\cos A\cdot\cos B$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = a^2\cos^2B = 2ab\cdot\cos A\cdot\cos B + b^2\cos^2A$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = (a\cos B + b\cos A)^2$

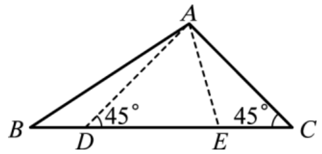
其中 $a\cos B + b\cos A = a\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + b\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = c$（投影定理）

$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

$\Rightarrow$ △ABC 為直角三角形

故選(B)

(**A**)10. $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}$ 邊上兩點　D，E 分別與 A 連線。假設∠ACB＝∠ADC＝45°，三角形 ABC，ABD，ABE 的外接圓直徑分別為 c，d，e。請問下列何者為真？



(A) d＝c＞e　(B)d＜e＜c　(C)e＜c，d＜c　(D)d＝c＜e。

解析：

在△ABC 中，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin 45°}=c$……………………①

在△ABD 中，∠BDA＝135° ⇒ $\dfrac{\overline{AB}}{\sin 135°}=d$ ……………②

在△ABE 中，令∠AEB＝θ

⇒θ＝∠EAC＋∠ECA＞45°

⇒ $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}=e$ ………………③

由①、②得 c＝d，又∵θ＞45°　∴sinθ＞sin45°

⇒ $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}<\dfrac{\overline{AB}}{\sin 45°}$

由①、③得 c＞e ⇒ d＝c＞e

故選(A)

(**D**)11. $a+b=\sqrt{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$a-b=\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$，則 $a^4+a^2b^2+b^4$ 之值為

(A)$\sqrt{3}$　(B)　$2\sqrt{2}$　(C)$\sqrt{2}-\sqrt{3}$　(D)$4\sqrt{6}$。

(1)$(a+b)(a-b)=a^2-b^2=\sqrt{10\sqrt{6}-15}$

$\Rightarrow a^4-2a^2b^2+b^4=10\sqrt{6}-15$……………①

(2)$\begin{cases}(a+b)^2=3\sqrt{3}-\sqrt{2} & \cdots\cdots② \\ (a-b)^2=3\sqrt{2}-\sqrt{3} & \cdots\cdots③\end{cases}$

②＋③得 $a^2+b^2=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$\Rightarrow a^4+2a^2b^2+b^4=5+2\sqrt{6}$　……………④

①＋④得 $a^4+b^4=-5+6\sqrt{6}$ 代入(1)⇒$a^2b^2=5-2\sqrt{6}$

$a^4+a^2b^2+b^4=(-5+6\sqrt{6})+(5-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$

故選(D)

(　**A**)12. a，b，c 為實數，$2^a=5^b=10^c$，則 bc＋ca－ab＝

(A)0　(B)1　(C)2　(D)　5。

解析：

$2^a=10^c \Rightarrow 2=10^{\frac{c}{a}}$……………①

$5^b=10^c \Rightarrow 5=10^{\frac{c}{b}}$……………②

由①x②得 $2\times5=10^{\frac{c}{a}}\times10^{\frac{c}{b}} \Rightarrow 10=10^{\frac{c}{a}+\frac{c}{b}}$

$\Rightarrow \frac{c}{a}+\frac{c}{b}=1 \Rightarrow ab=bc+ca \Rightarrow bc+ca-ab=0$

故選(A)

(**A**)13.一等差數列的項數為偶數，已知其奇數項與偶數項的和分別為 24 與 30，若最後一項比第一項大 10.5，則此等差數列的項數為

(A)8 (B)18 (C)12 (D) 10。

解析：

設項數為 $2n$，公差為 d，S_1 為奇數項的和，S_2 為偶數項的和

則 $S_2-S_1=nd$，首末項的差為（$2n-1$）d

$\Rightarrow \begin{cases} nd=30-24=6 \\ (2n-1)\ d=10.5 \end{cases} \Rightarrow d=2nd-10.5=1.5$

$\Rightarrow n=\frac{6}{1.5}=4$

$\Rightarrow$ 總項數為 $2n=8$，故選(A)

(**C**)14. 設 x，y，z，u 為正整數，則 $x+y+z+u^2=21$ 有幾組解？

(A)252 組(B)280 組 (C)352 組 (D)412 組。

解析：

(1) $u=1$ 時，$x+y+z=20$ 之正整數解共有

$H^3_{20-3}=H^3_{17}=C^{3+17-1}_{17}=C^{19}_{17}=171$

(2) $u=2$ 時，$x+y+z=17$ 之正整數解共有

$H^3_{17-3}=H^3_{14}=C^{3+14-1}_{14}=C^{16}_{14}=120$

(3) $u=3$ 時，$x+y+z=12$ 之正整數解共有

$H^3_{12-3}=H^3_{9}=C^{3+9-1}_{9}=C^{11}_{9}=55$

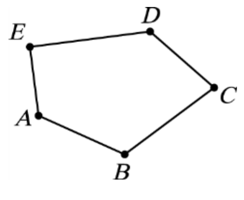
(4) $u=4$ 時，$x+y+z=5$ 之正整數解共有

$H^3_{5-3}=H^3_{2}=C^{3+2-1}_{2}=C^{4}_{2}=6$

所以方程式 $x+y+z+u^2=21$ 之正整數解共有 352 組，故選(C)

(**D**)15. 小強用 5 種顏色塗一個五邊形 ABCDE（如圖）的每個頂點（一個頂點塗一種顏色），則使每條對角線的兩個端點顏色不同的機率為何？

(A)$\frac{24}{625}$ (B)$\frac{64}{625}$ (C)$\frac{144}{625}$ (D)$\frac{204}{625}$。



解析：

case 1：A、B 同色（或 B、C 或 C、D 或 D、E 或 E、A）

$\Rightarrow 5\cdot\underbrace{(4\cdot 3\cdot 2)}_{\text{另三點顏色}}\cdot\underbrace{5}_{\text{共 5 組可能}}=600$

case 2：都異色 $\Rightarrow 5!$

case 3：（AB 同、CD 同）或（AB 同、DE 同）$\Rightarrow 5\cdot 4\cdot 3\cdot 5=300$

$\therefore$所求為 $\frac{600+5!+300}{5^5}=\frac{1020}{5^5}=\frac{204}{625}$

故選(D)

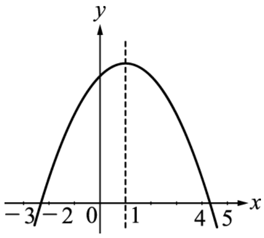
(**D**)16. 若二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，對任意實數 t，都有 $f(1+t)=f(1-t)$，且 $f(4)>0$，$f(5)<0$，則下列何者正確？ (A) $a>0$ (B) $b=2a$ (C) $c<0$ (D) $4a-2b+c>0$。

解析：

由已知條件 $f(1+t)=f(1-t)$ 得 $f(x)$ 的圖形對稱直線 $x=1$

又 $f(4)>0$，$f(5)<0\Rightarrow$ 圖形開口向下

由上述討論得函數圖形如下所示：



(A) ×：開口向下，$a<0$

(B) ×：由 $x=-\dfrac{b}{2a}\Rightarrow 1=-\dfrac{b}{2a}\Rightarrow b=-2a$

(C) ×：$c>0$

(D) ○：$4a-2b+c=f(-2)>0$

故選(D)

(**B**)17. 已知 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$，則 $f(x^5)$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 (A) 1 (B) 5 (C) x (D) $5x$ 。

解析：

$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1$，且 $f(x^5)=x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1$

由除法原理假設 $f(x^5)=(x^5-1)\cdot Q(x)+r(x)$

$\Rightarrow x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1=(x^5-1)\cdot Q(x)+r(x)$

$\Rightarrow r(x)=5$，亦即 $f(x^5)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot Q(x)+5$

$\Rightarrow f(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot[(x-1)Q(x)]+5$

所以 $f(x^5)$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 5，故選(B)

(**B**)18. $x^4-2(3a+1)x^2+7a^2+3a=0$ 恰有兩實根，求實數 a 之最小值為 (A) $-\dfrac{2}{7}$ (B) $-\dfrac{3}{7}$ (C) $-\dfrac{4}{7}$ (D) $-\dfrac{5}{7}$ 。

解析：

令 $y=x^2$ 則 $y^2-2(3a+1)y+7a^2+3a=0$ 恰有一負根

$\Rightarrow$ 即(1)一正根一負根或(2)一零根一負根

(1) $\begin{cases}4(3a+1)^2-4(7a^2+3a)>0\\7a^2+3a<0\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{3}{7}<a<0$

或(2) $\begin{cases}4(3a+1)^2-4(7a^2+3a)>0\\3a+1<0\\7a^2+3a=0\end{cases}\Rightarrow a=-\dfrac{3}{7}$

由（1）、（2）知所求 a 之最小值為 $-\dfrac{3}{7}$

故選（B）

（ **B** ）19. 某一調查發現，觀看美國職棒轉播的觀眾人數，會受王建民在美國職棒的勝場數影響。若觀看美職轉播的人數為 $f(k)$，滿足 $f(k)=a(1.2)^k$，其中 a 為常數，k 為王建民在美國職棒的勝場數。今發現 $f(k_1)=40000$，$f(k_2)=80000$，$f(k_3)=160000$，則下列選項何者正確？　(A) $k_3=2k_1+k_2$　(B) $k_3=2k_2-k_1$　(C) $k_3=k_1+k_2$　(D) $k_3=k_1\times k_2$。

解析：

依題意 $\begin{cases} f(k_1)=a(1.2)^{k_1}=40000 \cdots\cdots ① \\ f(k_2)=a(1.2)^{k_2}=80000 \cdots\cdots ② \\ f(k_3)=a(1.2)^{k_3}=160000 \cdots\cdots ③ \\ (f(k_2))^2=(a(1.2)^{k_2})^2=a^2(1.2)^{2k_2}=6400000000 \cdots\cdots ④ \end{cases}$

$\dfrac{④}{①}$ 得 $\dfrac{a^2(1.2)^{2k_2}}{a(1.2)^{k_1}}=\dfrac{6400000000}{40000}$

$\Rightarrow a(1.2)^{2k_2-k_1}=160000$

又 $a(1.2)^{k_3}=160000$

得 $k_3=2k_2-k_1$

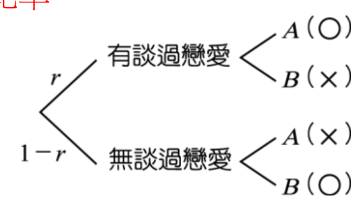
故選（B）

（ **B** ）20. 研究者若善用統計技巧，將可降低受訪者心防，使調查結果更加可靠，神眉老師想了解班上 40 名同學中，約有多少比率在國中前即談過戀愛，於是他設計了 A、B 兩份問卷，其中 A 卷 30 張，B 卷 10 張，及不記名答案卷 40 張，隨機發給班上同學（同學不是拿到 A 卷就是 B 卷，至於 A、B 卷皆不回收，答案卷要回收），其中 A 卷的問題是『我曾經在國中以前談過戀愛』，因此拿到 A 卷的同學若在國中前曾談過戀愛，就要在答案卷上畫『○』，若不曾談過戀愛就在答案卷上畫『╳』；反之，B 卷的問題則是『我不曾在國中以前談過戀愛』，因此拿到 B 卷的同學若國中前曾談過戀愛，就要在答案卷上畫『╳』，若不曾談過戀愛，則畫『○』。如此設計，不論某位學生回答的結果是○或╳，老師都無法得知該生在國中前是否談過戀愛，但可大致了解全班的狀況。答案卷經過回收後，老師發現 40 張答案卷中有 15 張畫『○』，25 張畫『╳』，則在本班同學中，約有多少比率的同學曾在國中以前談過戀愛？

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $\dfrac{1}{5}$　(D) $\dfrac{1}{8}$　。

解析：

設 r 為本班同學中有談過戀愛的比率



$A(\bigcirc)+B(\bigcirc)=\frac{3}{4}r+\frac{1}{4}(1-r)=\frac{15}{40}$

$\Rightarrow 6r+2(1-r)=3\Rightarrow r=\frac{1}{4}$

故選(B)

(**C**)21. It is a addition in right graph. A different sign represents a different number. How many possible values of D? (A)5 (B)6 (C)7 (D)8

翻譯:有一個加法算式如右圖，不同英文字母代表不同的阿拉伯數字，問 D 可能值有幾種?

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & & A & B \\ + & & & A \\ \hline & 1 & D & 0 \end{array}$$

解析：A=1

A+B+C=10，1+B+C=10➔B+C=9

A+B+1=D，1+B+1=D➔D=B+2

A	1	1	1	1	1	1	1
B	0	2	3	4	5	6	7
C	9	7	6	5	4	3	2
D	2	4	5	6	7	8	9

共 7 種

(**B**)22. Joe and Mary had an investment to feed n pigs. Each pig was sold n dollars and was sold out. They decided to share the money equally. Joe takes away 10 dollars at first, than Mary takes away 10 dollars, Joe takes away 10 dollars,..... . Finally , Mary takes the money less than 10 dollars. How much money should Joe give Mary the money? (A)1 元 (B)2 元 (C)3 元 (D)4 元

翻譯:甲、乙兩人合資共養了 n 頭豬。今每頭豬以 n 元的價格全部賣掉，然後兩人用下面的方式分錢:甲先拿 10 元，再由乙拿 10 元，再由甲拿 10 元，……，如此輪流，拿到最後，剩下不足 10 元輪到乙拿去，為了公平分配，甲應該補給乙多少元?

解析：共賣 $n\times n=n^2$，n^2 的十位數為奇數，設 n=10a+b，則

$n^2=(10a+b)^2=20(5a^2+ab)+b^2$

➔ b^2 的十位數必為奇數，檢視 1^2，2^2，3^2，….. ，9^2，得知十位數為奇數只有 4^2 及 6^2，故 n^2 之個位數為 6➔最後一次甲拿 10 元，乙拿 6 元

(10-6)÷2=2，甲應該給乙 2 元。

(**B**)23.A、B、C、D 四人在自習室讀書，其中一人在讀英文，一人在讀數學，一人在讀國文，另一人在讀自然，已知:

①A 不在讀英文，也不在讀自然。

②B 不在讀國文，也不在讀英文。

③若 A 不在讀國文，則 D 不在讀英文

④C 不在讀自然，也不在讀英文

⑤D 不在讀自然，也不在讀國文

請問 C 在讀哪一科?(A)英文 (B)數學 (C)國文 (D)自然

解析：

(1)A、C、D 都不讀自然，B 讀自然。

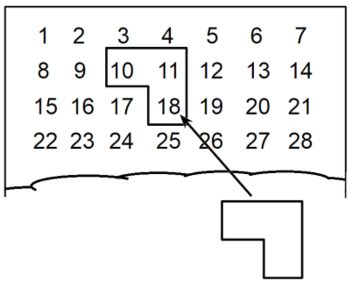
(2)A、B、C 都不讀英文，D 讀英文。

(3)由(3)若 D 讀英文，則 A 讀國文➔A 讀國文。

(4)C 讀數學。

(**A**)24. The first row is one to seven. The 2nd row is eight to fourteen. ....It was shown as right pic. Use a transparent L ruler to cover three numbers. Look at it, the sum of the three number is 39. A transparent L ruler can spin. If the sum of the three numbers is 346, how much the smallest number?

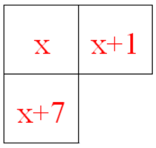
(A)111 (B)110 (C)121 (D)120



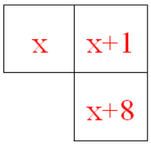
翻譯:第一列為 1 至 7，第二列為 8 至 14，....如右圖所示。用一透明矩尺罩住三個數字，右圖中，所罩住的三個數字之和為 39。矩尺的方向可以變化，請問此矩尺所罩住三個數字和為 346，最小的數字為多少?

解析：

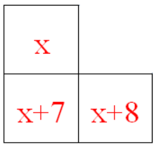
(1) x+x+1+x+7=346，3x=338，x=$\dfrac{338}{3}$(不合)



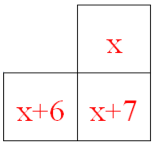
(2)x+x+1+x+8=346，3x=337，x=$\dfrac{337}{3}$(不合)



(3)x+x+7+x+8=346，3x=331，x=$\dfrac{331}{3}$(不合)

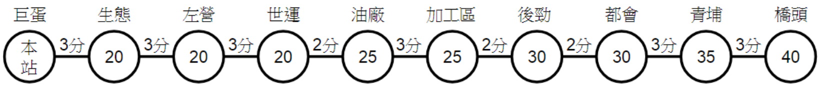


(4)x+x+6+x+7=346，3x=333，x=$\dfrac{333}{3}=111$(符合)

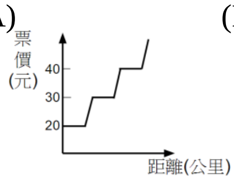


選 A。

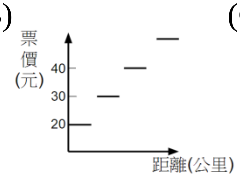
(**B**)25.下圖是高雄捷運，巨蛋站到各站的票價及兩站之間的行駛時間，捷運票價與搭乘距離關係如下，你認為哪個圖表最為合理?



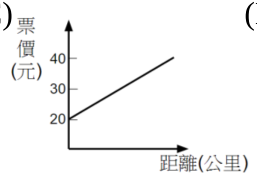
(A)



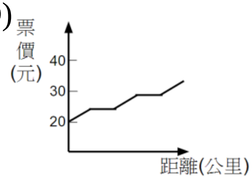
(B)



(C)

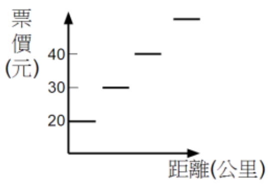


(D)



解析：

距離(KM)	票價(元)
0~5	20
5~7	25
7~9	30
9~11	35
11~13	40



選(B)

二、計算題 請寫出計算過程，沒寫計算過程就不給分

(第 1、2 題各 20 分，第 3 題 10 分，共 50 分)

1. 設p、q、$\frac{2p-1}{q}$、$\frac{2q-1}{p}$均為整數，且$p>1$，$q>1$，則$p+q=$？

解析：

設$p \geq q$

$0<(2q-1)/p<(2q-1)/q=2-1/q<2$

且$(2q-1)/p \in Z$ ∴$(2q-1)/p=1$

∴ $p=2q-1$代入

$(2\cdot p-1)/q=(2(2q-1)-1)/q=4-3/q$

且$(2p-1)/q \in Z$，$4 \in Z$ ∴$3/q \in Z \to q \mid 3$

$q>1$ ∴ $q=3$ 代入 $p=5$

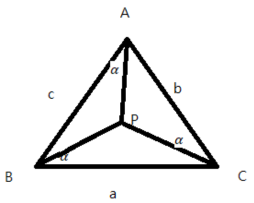
同理$p<q$時，解出$p=3$，$q=5$

所求$p+q=8$

2. P 為ΔABC內部一點，且$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \alpha$。

求證$csc^2\alpha = csc^2 A + csc^2 B + csc^2 C$

ΔAPC 中



$$\frac{\overline{AP}}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\angle APC} = \frac{b}{\sin(180^\circ - A)} = \frac{b}{\sin A}$$

$$\therefore \overline{AP} = \frac{b\sin\alpha}{\sin A}$$

$$\therefore \Delta PAB\text{ 面積} = \frac{1}{2}c\overline{AP}\sin\alpha = \frac{1}{2}cb\frac{sin^2\alpha}{\sin A} = \Delta ABC\text{ 面積}\cdot\frac{sin^2\alpha}{sin^2 A}$$

同理ΔPBC 面積 $=$ ΔABC 面積$\cdot\frac{sin^2\alpha}{sin^2B}$

ΔPCA 面積 $=$ ΔABC 面積$\cdot\frac{sin^2\alpha}{sin^2C}$

可得ΔABC 面積 $=$ ΔABC 面積$\cdot(\frac{sin^2\alpha}{sin^2A}+\frac{sin^2\alpha}{sin^2B}+\frac{sin^2\alpha}{sin^2C})$

$$\to \frac{1}{sin^2\alpha} = \frac{1}{sin^2A} + \frac{1}{sin^2B} + \frac{1}{sin^2C}$$

$$\to csc^2\alpha = csc^2A + csc^2B + csc^2C$$

3.某數學營開了六堂課，該營隊的 20 名學生每人均已選修其中的 0 至 6 門課(可以都不選，最多選 6 門課)，試問：是否可以找出 5 名學生和 2 門課，使得這 5 人同時都選修這兩門課或同時都沒選修這兩門課?

解析：

從 6 門課選修 3 門，共 20 種情形

123、124、125、126➔都有 1、2

134、135、136、145

146、156、234、235

236、245、246、256

345、346、356、456➔都沒有 1、2

對於任 2 門課，有 4 人皆選，也有 4 人皆沒選，但不可能有 5 人都選或都沒選某 2 堂課。