



# 第十八屆IMC國際數學競賽初賽(台灣區)

Eighteenth IMC International Mathematics Preliminary Contest (Taiwan)

## 國中一年級(初賽)試卷

考試時間: 60 分鐘 卷面總分:300 分 得分: \_\_\_\_\_

### 一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

1. 若 $|a| > |b|$ ，且 $a < 0 < b$ ，則下列何者可能為 $a$ 、 $b$ 在數線上的情形?

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

<解析>

$|a| > |b| \rightarrow a$  到原點的距離  $>$   $b$  到原點的距離

且  $a$  必須在原點的左邊，選 C。

2. 媽媽買了 $1\frac{1}{4}$ 公斤的番茄花了 60 元，表姊買了 1.5 公斤相同的番茄要付多少元? (A)87.5

(B)72 (C)80 (D)76

<解析>

$$60 \div 1.25 = 48$$

$$48 \times 1.5 = 72, \text{ 選 B。}$$

3. 根據圖形規律判斷，遺漏的圖形中有多少個星號? (A)14 (B)12 (C)16 (D)13



<解析>

由上而下的數量關係:  $3+1+4+1+3=12$  個

選 B。

4.  $n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$  叫做  $n$  階乘，求  $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 15!$  之和的個位數是多少? (A)1

(B)2 (C)3 (D)4

<解析>

$$1! = 1, 2! = 1 \times 2 = 2, 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6, 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \rightarrow \text{開始個位數是 } 0$$

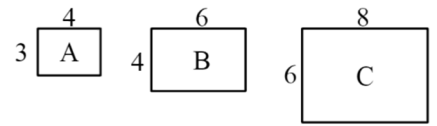
$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

.....

$$15! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 15 = \dots 0$$

故個位數  $= 1 + 2 + 6 + 4 = 13 \rightarrow$  個位數  $= 3$ ，選 C

5. As shown in the picture, Ariel has three different sizes of rectangular colored paper. she wants to use the same colored paper to form a square. Which one colored paper requires the least number of sheets.? (A)A (B)B (C)C (D) all the same



<解析>

A:  $[3, 4]=12$ ,  $\frac{12}{4} \times \frac{12}{3} = 12$

B:  $[4, 6]=12$ ,  $\frac{12}{4} \times \frac{12}{6} = 6$

C:  $[6, 8]=24$ ,  $\frac{24}{6} \times \frac{24}{8} = 12$

選用 B 色紙所需要的張數最少，選 B。

6. 逸凱買了 5 張單價 100 元的刮刮樂，中了 1000 元，下午他又買了 6 張刮刮樂，全部都沒中獎，隔天他又去買了 3 張刮刮樂，中了 500 元，請問逸凱共是賺還是賠多少?  
(A)賺了 100 元 (B)賠了 100 元 (C)賺了 200 元 (D)賠了 200 元

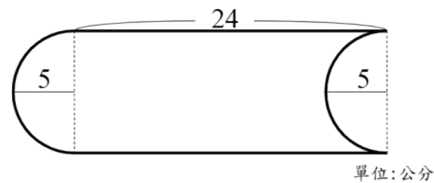
<解析>

$5+6+3=14$

$100 \times 14 = 1400$

$1000+500-1400=100$ ，賺了 100 元，選 A。

7. 求粗線圍成的周長是多少公分?  
(A)75.4 (B)77.4 (C)79.4 (D)81.4



<解析>

圓弧  $= 5 \times 2 \times 3.14 = 31.4$

$31.4 + 24 + 24 = 79.4$ ，選 C。

8. 在 450 以內至少有 4 個不同質因數的數有幾個? (A)2 (B)3 (C)4 (D)5

<解析>

$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

故  $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ ， $2 \times 3 \times 5 \times 11 = 330$ ， $2 \times 3 \times 5 \times 13 = 390$ ， $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

共有 4 個，選 C。

9. 秉忠、秉孝、秉仁和秉愛四位籃球選手在某場比賽中，分別上場投籃 17 次、18 次、19 次、20 次，結果分別命中 13 次、14 次、15 次、16 次，所以在這場比賽中，誰的命中率最高? (A)秉忠 (B)秉孝(C)秉仁 (D)秉愛

<解析>

$$\underline{\text{秉忠}} = \frac{13}{17}, 1 - \frac{13}{17} = \frac{4}{17}; \underline{\text{秉孝}} = \frac{14}{18}, 1 - \frac{14}{18} = \frac{4}{18}$$

$$\underline{\text{秉仁}} = \frac{15}{19}, 1 - \frac{15}{19} = \frac{4}{19}; \underline{\text{秉愛}} = \frac{16}{20}, 1 - \frac{16}{20} = \frac{4}{20}$$

$$\therefore \frac{4}{17} > \frac{4}{18} > \frac{4}{19} > \frac{4}{20} \rightarrow \frac{13}{17} < \frac{14}{18} < \frac{15}{19} < \frac{16}{20}, \underline{\text{秉愛}} \text{的命中率最高，選 D。}$$

10. A natural number deletes its leftmost digit to get a new number. If the original number is 57 times the new number. The smallest natural number that satisfies this condition is \_\_\_\_\_.  
(A)6125 (B)7125 (C)8125 (D)9125

<解析>

假設原數 =  $xy = x \cdot 10^n + y$ ，新數 =  $y$

$$x \cdot 10^n + y = 57y \rightarrow x \cdot 10^n = 56y \rightarrow x \cdot (2 \times 5)^n = 2^3 \cdot 7y$$

$$\text{當 } n=3 \text{ 有最小值，} x \cdot (2 \times 5)^3 = 2^3 \cdot 7y, x \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^3 \cdot 7y$$

$$\therefore 125x = 7y, x = 7, y = 125, \text{故原數} = 7125, \text{選 B。}$$

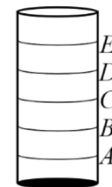
11. 承包商接洽了一件工程，工人在 25 天完成了  $\frac{5}{7}$ ，如果工作速度不變，尚需再做幾天才能完工?(A)5 (B)8 (C)10 (D)13

<解析>

$$25 \div \frac{5}{7} = 35$$

$$35 - 25 = 10, \text{選 C。}$$

12. 右圖是一個圓柱形罐子，可以裝 24 杯水或 6 桶水，如果倒入 5 杯水和 2 桶水，水面應該升到哪兩條線之間? (A)A~B (B)B~C (C)C~D (D)D~E



<解析>

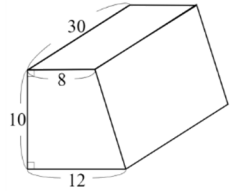
$$24 \div 6 = 4 \rightarrow \text{每格需要 4 杯水}$$

$$6 \div 6 = 1 \rightarrow \text{每格需要 1 桶水}$$

$$\text{故 5 杯水和 2 桶水} = 4 \text{ 杯} + 1 \text{ 桶} + 1 \text{ 桶} + 1 \text{ 杯} = 3 \text{ 格} + 1 \text{ 杯水}$$

$$\therefore \text{水面落在 C~D 之間，選 C。}$$

13. 求右圖柱體的體積是多少立方單位? (A)2000 (B)2400 (C)3000 (D)3600

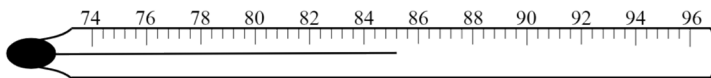


<解析>

$$(8+12) \times 10 \div 2 = 100$$

$$100 \times 30 = 3000, \text{ 選 C。}$$

14. 求下圖所表示溫度是幾度? (A) 85.2°C (B) 84.3°C (C) 85.3°C (D) 81.6°C



<解析>

$$86 - 84 = 2$$

$$2 \div 5 \times 3 = 1.2$$

$$84 + 1.2 = 85.2, \text{ 選 A。}$$

15. Choose any three different numbers from 1 to 9 and form a three-digit number. What is the sum of these three digits? (A)279720 (B)289720 (C)299720 (D)309720

<解析>

$$(1) \quad 1 \text{ 在百位、十位及個位都出現 } 8 \times 7 = 56 \text{ 次} \rightarrow \text{和} = 56 \times 1 \times 111$$

$$(2) \quad 2 \text{ 在百位、十位及個位都出現 } 8 \times 7 = 56 \text{ 次} \rightarrow \text{和} = 56 \times 2 \times 111$$

.....依此類推

$$\therefore \text{和} = 56 \times 111 \times (1+2+3+\dots+9) = 56 \times 111 \times 45 = 279720, \text{ 選 A。}$$

16. 某鄉鎮中有 4 個村莊，每一個村莊有 4 戶人家，每一戶人家都養 4 隻貓，每隻貓今天都抓到 4 隻老鼠，而每隻老鼠今天都吃 4 顆巧克力糖，請問這個鄉鎮今天被貓抓到的老鼠共吃了多少顆巧克力糖? (A)16 (B)64 (C)256 (D)1024

<解析>

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024, \text{ 選 D。}$$

17. 已知□、△和■都是二位數的質數，且 $\square \times \triangle + \square \div \blacksquare = 2022$ ，求 $\square + \triangle + \blacksquare$ 之和可能是下列哪一個? (A)129 (B)131 (C)133 (D)135

<解析>

$$\square \div \blacksquare = \text{整數倍} \rightarrow \square = \blacksquare$$

$$\square \times \triangle + 1 = 2022 \rightarrow \square \times \triangle = 2021, 2021 = 43 \times 47$$

$$\text{則 } \square = 43, \triangle = 47, \blacksquare = 43 \text{ 或 } \square = 47, \triangle = 43, \blacksquare = 47$$

$$\text{故 } \square + \triangle + \blacksquare = 43 + 47 + 43 = 133 \text{ 或 } \square + \triangle + \blacksquare = 47 + 43 + 47 = 137, \text{ 選 C。}$$

18. 已知  $a = \frac{99^9}{9^{99}}$  ,  $b = \frac{11^9}{9^{90}}$  ,  $c = (\frac{1}{10})^9$  , 比較  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之大小? (A)  $a=b>c$  (B)  $c>a=b$  (C)

$c>a>b$  (D)  $a>b>c$

<解析>

$$a = \frac{99^9}{9^{99}} \rightarrow a = \frac{(11 \times 9)^9}{9^{99}} = \frac{11^9}{9^{90}} = b$$

$$b = \frac{11^9}{9^{90}} = (\frac{11^1}{9^{10}})^9 < (0.1)^9 = (\frac{1}{10})^9 = c$$

$\therefore c > a = b$  , 選 B。

19. 計算  $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} = ?$  (A)  $\frac{3}{11}$  (B)  $\frac{4}{11}$  (C)  $\frac{5}{11}$  (D)  $\frac{6}{11}$

<解析>

$$\text{原式} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} = \frac{1}{2} (\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11})$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{1}{1} - \frac{1}{11}) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{11} = \frac{5}{11} , \text{選 C。}$$

20. The photocopier outputs 90 sheets of paper per minute. If the photocopying time exceeds 30 minutes, the operation will stop for 10 minutes. Then it continues to output at the same speed. If Bill uses this photocopier to print all the pages from 11:00 in the morning, he will stop to print until 3:50 in the afternoon. How many sheets of paper does this photocopier output during this period of time? (A)19400 (B)19600 (C)19800 (D)20000

<解析>

$$15:50 - 11:00 = 4:50$$

$$4 \text{ 時 } 50 \text{ 分} = 290 \text{ 分}$$

$$290 \div (30 + 10) = 7 \dots 10$$

有 7 次機器休息

$$90 \times (290 - 7 \times 10) = 19800 , \text{選 C。}$$

21. 滿足  $n^{300} < 7^{400}$  之最大正整數  $n$  為多少? (A)10 (B)11 (C)12 (D)13

<解析>

$$n^{300} < 7^{400} \rightarrow (n^3)^{100} < (7^4)^{100} \rightarrow n^3 < 7^4$$

$$\therefore 7^4 = 2401 \rightarrow n^3 < 2401$$

$$10^3 = 1000 , 11^3 = 1331 , 12^3 = 1728 , 13^3 = 2197 , 14^3 = 2744$$

最大正整數  $n = 13$  , 選 D。

22. 將一個裝滿水的容器倒出 $\frac{1}{2}$ 的水量，再倒出剩餘水量的 $\frac{1}{3}$ ，再倒出剩餘水量的 $\frac{1}{4}$ ，依據相同的步驟以此類推，總共要多少次才會使得容器中剩餘的水量恰好是原來的 $\frac{1}{10}$ ？  
(A)7 (B)8 (C)9 (D)10

<解析>

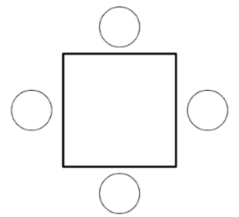
$$\text{第一次剩餘水量: } 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{第二次剩餘水量: } (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{第九次剩餘水量: } (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{10}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\text{第九次的剩餘水量} = \frac{1}{10}, \text{ 選 C。}$$

23. 佩佩一家四口到餐廳用餐，其餐桌座位如右圖所示，若四人隨機入座，則佩佩坐在媽媽對面的機率是多少？(A) $\frac{1}{6}$  (B) $\frac{1}{4}$  (C) $\frac{1}{3}$  (D) $\frac{1}{2}$



<解析>

四個座位 A、B、C、D

若 A 座位對面 C 座位；B 座位對面 D 座位

先選座位:  $4 \times 2 \times 1 \times 1 = 8$

任意坐:  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$$\text{坐對面的機率} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}, \text{ 選 C}$$

<另解>

媽媽坐定位置後，佩佩有 3 種選擇，只有一種選擇會坐到媽媽的對面

$$\text{故機率} = \frac{1}{3}$$

24. 阿彬到市場買水果，其身上帶錢可以買 12 個柳丁或 28 個蘋果或 42 個奇異果，如今三種水果都買，每種數量都相等，問他應該各買幾個？(A)9 (B)10 (C)7 (D)8

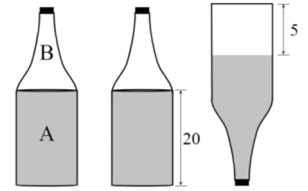
<解析>

$$12 \times \triangle = 28 \times \square = 42 \times \star \text{ 且 } [12, 28, 42] = 84$$

$$\triangle = 7, \square = 3, \star = 2$$

$$\text{則 } 84 \div (7+3+2) = 7, \text{ 各買 7 個，選 C。}$$

25. A bottle of beverage has two parts A and B. Part A is a cylinder, as shown in the picture. Now the bottle contains some drinks. The height of the beverage is 20 cm when placed. The height of the remaining part is 5 cm when it is reversed. If the volume of the beverage bottle is  $30000 \text{ cm}^3$ . What is the volume of the existing beverage in the bottle? (A)20000 (B)22000 (C)24000 (D)26000

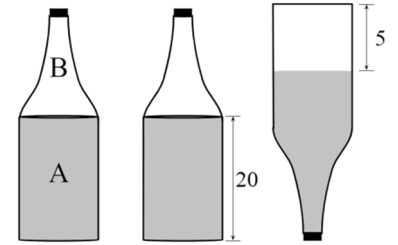


<解析>

假設 A 部分的底面積 =  $x \text{ cm}^2 \rightarrow$  A 體積  $20x \text{ cm}^3$ ，B 體積  $5x \text{ cm}^3$

$$20x + 5x = 30000, x = 1200$$

則  $1200 \times 20 = 24000$ ，選 C。



## 二、計算題(每題 25 分，共 50 分，請寫出簡要過程，可得過程分)

1. 珍珍音響專賣店週年慶，有兩款音響均價賣 48000 元，已知其中一款以成本計算賺了 20%，另一款以成本計算賠了 20%，請問這兩款音響各賣一臺時，共賺或賠多少錢？

<解析>

第一臺:  $48000 \div (1 + 0.2) = 40000$  元

第二臺:  $48000 \div (1 - 0.2) = 60000$  元

$$48000 \times 2 - 40000 - 60000 = -4000$$

$\therefore$  賠了 4000 元。

2. 試問  $6^{582}$  除以 11 之餘數是多少？

<解析>

(1)  $6 \div 11$  的餘數 = 6

(2)  $6^2 \div 11$  的餘數 = 3

(3)  $6^4 \div 11$  的餘數  $\rightarrow (6^2 \cdot 6^2) \div 11$  的餘數 =  $3 \times 3 = 9$

(4)  $6^8 \div 11$  的餘數  $\rightarrow (6^4 \cdot 6^4) \div 11$  的餘數 =  $9 \times 9 = 81 \div 11$  餘 4

(5)  $6^{10} \div 11$  的餘數  $\rightarrow (6^2 \cdot 6^8) \div 11$  的餘數 =  $3 \times 4 = 12 \div 11$  餘 1

(6)  $6^{582} \div 11$  的餘數  $\rightarrow [(6^{10})^{58} \cdot 6^2] \div 11$  的餘數 =  $1^{58} \times 3 = 3$  餘 3