第二十一屆IMC國際數學競賽台灣區複賽
21st International Mathematics Contest(Taiwan)

國中二年級試卷

考試時間:90 分鐘　卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：______________ 准考證號碼：______________ 試題總分：_______________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績! ◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績!								
選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	A	C	C	B	D
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	35	-9	48	-2 或 0	6	5	3999999	$(\frac{27}{14}, \frac{19}{7})$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. Let a be a positive integer with $1 \le a \le 2025$. How many values of a are there such that $\sqrt{4+a}$ is an integer?? (A)41 (B)42 (C)43 (D)44

<解析>

$1 \le a \le 2025 \to 5 \le a+4 \le 2009$

$\therefore \sqrt{5} \le \sqrt{a+4} \le \sqrt{2029}$，$2.23 \le \sqrt{a+4} \le 45.04$

$\sqrt{a+4}=3$、4、5、……、45

$a+4=3^2$、4^2、5^2、……、$45^2 \to 45-3+1=43$，選 C。

2. 已知 x-1 的平方根為±2，已知 $3x+y-1$ 的平方根為±4，則 $6x+3y$ 的算術平方根是_______。(A)5 (B)6 (C)7 (D)8

<解析>

x-1 的平方根為±2，$x-1=4$，$x=5$

$3x+y-1$ 的平方根為±4，$3x+y-1=16$，$3\times5+y-1=16$，$y=2$

$6x+3y=36$，$6x+3y$ 的算術平方根為 6，選 B。

3. 若 x 為正整數，$7x^2+4x-75$代表一質數，則此質數應為多少? (A)53 (B)59 (C)61 (D)67

<解析>

$7x^2+4x-75=(7x+25)(x-3)$，為質數，必有因數 1

$\therefore$ $x-3=1$ 或 $7x+25=1$(不合)，$x=1+3=4$

$\therefore$質數為 $7\times4+25=28+25=53$，選 A。

4. 已知 a 為無理數，$2ab-\sqrt{3}a+2b=\sqrt{3}$，則 $b=$_______。(A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B)$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C)$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D)$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

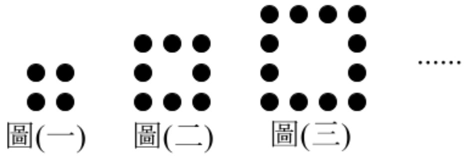
<解析>

$\because 2ab-\sqrt{3}a+2b=\sqrt{3}$，$\therefore a(2b-\sqrt{3})+(2b-\sqrt{3})=0$， $(a+1)(2b-\sqrt{3})=0$

又 a+1 是無理數，不為 0

$\therefore 2b-\sqrt{3}=0$，$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$，選 A。

5. 如右圖，將黑色棋子依規律排成(一)、(二)、(三)、......等十個越來越大的正方形，試問從圖(一)到圖(十)共需要多少顆黑色棋子? (A)212 (B)216 (C)220 (D)224

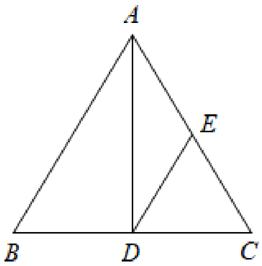


<解析>

$a_1=4$，$a_2=8$，$a_3=12$，........

$a_1=4$，$d=4$，$S_{10}=\frac{10}{2}\times[2\times4+(10-1)\times4]=220$(顆)，選 C。

6. 如圖，在$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}$是中線，且$\overline{AD}=7$，$\overline{BC}=10$，點 E 為$\overline{AC}$中點，則$\overline{DE}$的值為_______。 (A) $\frac{\sqrt{67}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{71}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{74}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{77}}{2}$



<解析>

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}$是中線

$\therefore \overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=5$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$

故$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{74}$，且點 E 為$\overline{AC}$中點，$\therefore \overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{\sqrt{74}}{2}$，選 C。

7. 已知$(3x+1)(ax+b)=-3x^2+cx+1$，求 $a\times b\times c$ 的值是? (A)2 (B)-2 (C)6 (D)-6

<解析>

$b=1$，$a=-1$，$(3x+1)(-x+1)\rightarrow c=-1+3=2$

$a\times b\times c=(-1)\times1\times2=-2$，選 B。

8. 將三角形 ABC 的 BA 邊延射線 BA 方向延長 1 倍到 D，CB 邊延射線 CB 方向延長 2 倍到 E，AC 邊延射線 AC 方向延長 3 倍到 F。如果三角形 ABC 的面積等於 1，那麼三角形 DEF 的面積是_______ 。 (A)15 (B)16 (C)17 (D)18

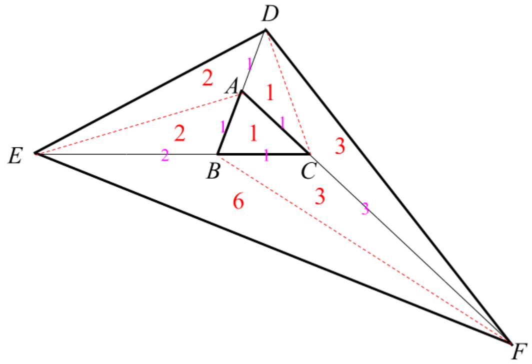
<解析>

連接$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$

$\because \overline{EB}=2\overline{BC}$

$\therefore S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADE}=2$ 同理可得：$S_{\triangle ACD}=1$，$S_{\triangle BCF}=3$，$S_{\triangle BEF}=2S_{\triangle BCF}=6$

$\therefore S_{\triangle DEF}=2+2+1+1+3+3+6=18$，選 D。



二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 有一等差級數項數為奇數，且奇數項的和$(a_1+a_3+a_5+....)=36$，偶數項的和$(a_2+a_4+a_6+....)=34$，則此等差級數有_______項。

<解析>

奇數項的和平均數=偶數項的和平均數

∴奇數項與偶數項的項數比=36:34=18:17

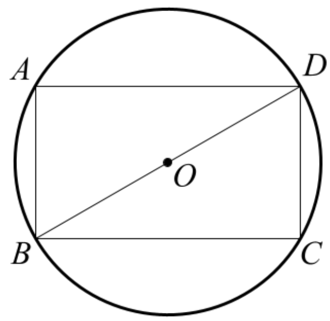
∴18+17=35

2. 已知 a-b=6，$ab+c^2+9=0$，則 ab 的值為_______ 。

<解析>

$a-b=6$，$a=b+6$，代入$ab+c^2+9=0$，得$(b+6)b+c^2+9=0$

$\therefore (b+3)^2+c^2=0$，$b=-3$，$c=0$，$a=b+6=3$，故 $ab=-9$。



3. As shown in the figure on the right, ABCD is a rectangle, and $\overline{BD}$ is the diameter of circle O. If the radius is 5 and $\overline{AB}$ = 6, then the area of rectangle ABCD is _______.

<解析>

△ABD 為直角三角形，$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2$，$10^2=6^2+\overline{AD}^2$，$\overline{AD}=8$

長方形面積= $\overline{AD}\times\overline{AB}=8\times6=48$

4. 已知關於 x 的方程 $\frac{2}{x-1}+\frac{t}{x+5}=0$ 無解，則 t 的值是_______。(全對才給分)

<解析>

去分母，得 $2(x+5)+t(x-1)=0$

$\rightarrow 2x+10+tx-t=0$，$(2+t)x=t-10$

當 $t=-2$ 時，整式方程無解，則分式方程無解。

當 $t\neq-2$ 時，分式方程有增根 $x=1$ 或 $x=-5$。

當 $x=1$ 時，$2(1+5)+t(1-1)=0$，此情況不存在

當 $x=-5$ 時，$2(-5+5)+t(-5-1)=0$，$t=0$

故 t 的值是-2 或 0

5. 若$2a^2+b^2+c^2-12a-8b-10c+59=0$，其中 a、b、c 為三角形之三邊長，求此三角形的面積是_______平方單位。

<解析>

$2(a^2-6a+3^2)+(b^2-8b+4^2)+(c^2-10c+5^2)=0$

$2(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$

$a=3$，$b=4$，$c=5\rightarrow$直角三角形

面積$=\frac{1}{2}\times3\times4=6$

6. $(\sqrt[3]{2})^{2025}+(\sqrt[3]{3})^{2025}$的末位數字是_______。

<解析>

$(\sqrt[3]{2})^{2025}=2^{675}$，$(\sqrt[3]{3})^{2025}=3^{675}$

又 $2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$，....

2^n 的末位數字依次為: 2、4、6、8、2、4、……，每 4 個一循環

故 $675\div4=168\ldots3$，2^{675}的末位數字是 8

又 $3^1=3$，$3^2=9$，$3^3=27$，$3^4=81$，$3^5=243$，....

故 $675\div4=168\ldots3$，3^{675}的末位數字是 7

$\therefore(\sqrt[3]{2})^{2025}+(\sqrt[3]{3})^{2025}$的末位數字是 5

7. 計算: $1999^2+3998=$_______。

<解析>

原式$=1999^2+1999\times2=1999\times(1999+2)=1999\times2001$

$=(2000-1)(2000+1)=4000000-1=3999999$

8. 無論 k 取何值，關於 x 的一次函數$(2k+4)x+(3k-1)y-(12k+5)=0$ 的圖像必經過定點________。

<解析>

$(2k+4)x+(3k-1)y-(12k+5)=0$

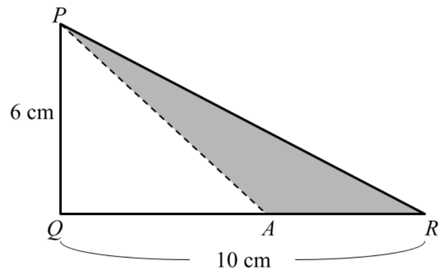
$\therefore (2x+3y-12)k+4x-y-5=0$

$\because$ 無論 k 取何值，一次函數的圖像必過定點，$\begin{cases}2x+3y-12=0\\4x-y-5=0\end{cases}$，得解$\begin{cases}x=\dfrac{27}{14}\\y=\dfrac{19}{7}\end{cases}$，

$\therefore$ 必通過$(\frac{27}{14}, \frac{19}{7})$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. 直角△PQR，$\angle Q=90°$，在$\overline{QR}$上有一動點 A，從 Q 點向 R 點出發 x cm 後，△PAR 的面積為 y cm^2。



(1) 求 x 與 y 的關係式? (5 分)

(2) 當△PAR 面積為 12 cm^2時，則 A 點距 Q 點是多少公分? (5 分)

<解析>

(1) $\overline{QA}=x \rightarrow \overline{AR}=10-x$

$y=\frac{1}{2}\times\overline{AR}\times\overline{PQ}==\frac{1}{2}\times(10-x)\times 6$，$y=3(10-x)$，$y=-3x+30$

(2) $y=-3x+30=12$，$-3x=-18$，$x=6$

2. Given that a and b are natural numbers, and $9ab+12a+\frac{4a}{b}=2025$, find the values of a and b.

<解析>

$\frac{4a}{b}$為正整數，設$\frac{4a}{b}=k$，則 $4a=bk$，$\frac{9b^2k}{4}+3bk+k=2025$

$\therefore k(\frac{3b}{2}+1)^2=2025$，$k(3b+2)^2=2025\times4=90^2$， 又 $90=2\text{x}3^2\text{x}5$，$b\geq0$

$\therefore \begin{cases}k=2025\\3b+2=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=324\\3b+2=5\end{cases} \rightarrow \begin{cases}k=2025\\b=0\end{cases}$ (不合) 或 $\begin{cases}k=324\\b=1\end{cases}$，故 $a=81$，$b=1$