

第二十一屆**IMC**國際數學競賽台灣區複賽
21st International Mathematics Contest(Taiwan)

高
中
二
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：_____ 准考證號碼：_____ 試題總分：_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！

◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	C	A	B	A	D
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$-\frac{4}{5} < m < 0$	100	$\frac{1}{2}$	41	97	$\frac{17}{26}$	192	40320

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 已知 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = 4$, $\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = 6$, 則 $\begin{cases} 3bx - 2ay + e = 0 \\ 3dx - 2cy + f = 0 \end{cases}$ 的解為 $(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 (A) $(\frac{3}{2}, -\frac{2}{3})$ (B) $(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$ (C) $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$ (D) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

<解析>

已知 $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ 的解為 $x = \frac{|e \ b|}{|f \ d|} = \frac{6}{2} = 3$, $y = \frac{|a \ e|}{|c \ b|} = \frac{4}{2} = 2$

則 $\begin{cases} a(-2y) + b(3x) = -e \\ c(-2y) + d(3x) = -f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(2y) + b(-3x) = e \\ c(2y) + d(-3x) = f \end{cases} \therefore 2y = 3 \text{ 且 } -3x = 2, x = -\frac{2}{3}, y = \frac{3}{2}$, 選 B。

2. 設 $f_k(x) = k \sin x + (1-k) \cos x$, 其中 $0 \leq k \leq 1$, 當 k 由 0 遞增到 1 時, 關於振幅的敘述下列哪一個選項為真?

- (A) 隨 k 值增加, $f_k(x)$ 的振幅變大 (B) 隨 k 值增加, $f_k(x)$ 的振幅變小
 (C) 隨 k 值增加, 振幅先變大再變小 (D) 隨 k 值增加, 振幅先變小再變大

<解析>

振幅為 $\sqrt{k^2 + (1-k)^2} = \sqrt{2k^2 - 2k + 1} = \sqrt{2(k - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}$

當 $k = \frac{1}{2}$ 時, 振幅有最小值為 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0.707$

得知 k 值由 0 遞增至 1 時, 振幅由 1 先變小到 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 再變大到 1, 選 D。

3. P 點在空間坐標中的第一卦限，若 P 點到 x 軸的距離為 $\sqrt{26}$ ， P 點到 y 軸的距離為 $\sqrt{34}$ ， P 點到 yz 平面的距離為 3，求 P 點坐標為 _____。
 (A) (3, 5, 1) (B) (5, 1, 3) (C) (3, 1, 5) (D) (1, 3, 5)

<解析>

設 $P(3, b, c)$ ， $b > 0$ ， $c > 0$

$$\text{則 } \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{26}, \sqrt{3^2 + c^2} = \sqrt{34}$$

$$\therefore c=5, b=1$$

得 $P(3, 1, 5)$ ，選 C。

4. The value of $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$ is _____.

- (A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 5 (D) $\frac{1}{5}$

<解析>

$$\text{原式} = (\log_2 3 + \frac{2}{2} \log_2 3)(2 \log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 2)$$

$$= (2 \log_2 3)(\frac{5}{2} \log_3 2) \rightarrow \log_2 3 \text{ 與 } \log_3 2 \text{ 互為倒數，相乘為 } 1$$

$$= 2 \cdot \frac{5}{2} = 5, \text{ 選 C。}$$

5. 計算 $\tan 37^\circ + \tan 23^\circ + \sqrt{3} \tan 37^\circ \tan 23^\circ = \text{_____}$ 。
 (A) $\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

<解析>

$$\because 37^\circ + 23^\circ = 60^\circ$$

$$\therefore \tan(37^\circ + 23^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\frac{\tan 37^\circ + \tan 23^\circ}{1 - \tan 37^\circ \tan 23^\circ} = \sqrt{3} \rightarrow \tan 37^\circ + \tan 23^\circ = \sqrt{3} - \sqrt{3} \tan 37^\circ \tan 23^\circ$$

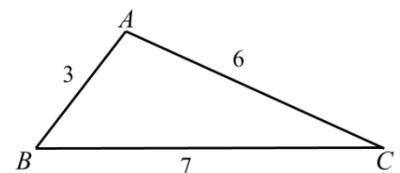
$$\text{故 } \tan 37^\circ + \tan 23^\circ + \sqrt{3} \tan 37^\circ \tan 23^\circ = \sqrt{3}$$

6. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=3$ ， $\overline{BC}=7$ ， $\overline{CA}=6$ ，求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \text{_____}$ 。

- (A)-1 (B)-2 (C)-3 (D)-4

<解析>

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \cos A = 3 \times 6 \times \frac{3^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 6} = \frac{-4}{2} = -2$$



7. 梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 2$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， P 、 Q 為 \overline{BC} 、 \overline{CD} 中點，若 $\overline{AC} = x\overline{AP} + y\overline{AQ}$ ，求數對 $(x, y) = ?$ (A) $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ (B) $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ (C) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ (D) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

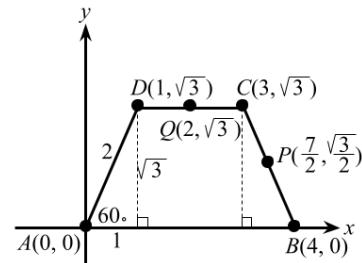
<解析>

將圖形坐標化如右圖

$$\overline{AC} = (3, \sqrt{3})$$

$$\overline{AC} = (3, \sqrt{3}) = x(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) + y(2, \sqrt{3}) = (\frac{7}{2}x + 2y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}y)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 6 \\ x + 2y = 2 \end{cases}, x = \frac{2}{5}, y = \frac{4}{5}, \text{所以} (x, y) = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5}), \text{選 A。}$$



8. 若 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x+1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}$ ，則 $f(x)$ 之最小值為下列哪一個選項? (A) 3 (B) 1 (C) 0 (D)-3

<解析>

$$f(x) = 3x - (x+1) + x^2 - 1 = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$$

則最小值為-3，選 D。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 四次方程式 $mx^4 - (m-3)x^2 + 3m = 0$ ，有一個根小於-2，其餘三個根大於-1，則 m 的取值範圍為_____。

<解析>

$$\text{設 } t = x^2, \text{ 則 } mt^2 - (m-3)t + 3m = 0$$

$\because m \neq 0$ 不符合題意，故 $m \neq 0$

方程可化成 $t^2 - \frac{m-3}{m}t + 3 = 0$ ，

設 $f(t) = t^2 - \frac{m-3}{m}t + 3$ ，且 $f(t_1) = f(t_2) = 0$

當 $t_1 = x_1^2, t_2 = x_2^2 \rightarrow x_1 = -\sqrt{t_1}, x_2 = \sqrt{t_1}, x_3 = -\sqrt{t_2}, x_4 = \sqrt{t_2}$

滿足 $-\sqrt{t_1} < -2$ 且 $-\sqrt{t_2} > -1 \rightarrow \sqrt{t_1} > 2, \sqrt{t_2} < 1 \rightarrow t_1 > 4, 0 < t_2 < 1$

故 $f(0) = 3 > 0$ ；

$$f(1) = 1 - \frac{m-3}{m} + 3 < 0, 4 - \frac{m-3}{m} < 0, \frac{4m-m+3}{m} < 0, (3m+3)m < 0, -1 < m < 0$$

$$f(4) = 16 - \frac{m-3}{m} \times 4 + 3 < 0, 19 - \frac{4m-12}{m} < 0, \frac{19m-4m+12}{m} < 0, \frac{15m+12}{m} < 0$$

$$\rightarrow (15m+12)m < 0, -\frac{4}{5} < m < 0, \text{ 則取值範圍為 } -\frac{4}{5} < m < 0.$$

2. 設 $S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ ，若 $|S_n - 1| < \frac{1}{100}$ ，則正整數 n 的最小值=_____。

<解析>

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore |S_n - 1| < \frac{1}{100} = \left|1 - \frac{1}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{100} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \Rightarrow n > 99$$

$\therefore n$ 的最小值為 100

3. 試求以 $2x + \cos 20^\circ$ 除 $f(x) = 32x^3 - 6x + 1$ 的餘式是_____。

<解析>

$$\text{令 } 2x + \cos 20^\circ = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \cos 20^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{故餘式為 } f\left(-\frac{1}{2} \cos 20^\circ\right) &= 32\left(-\frac{1}{2} \cos 20^\circ\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{2} \cos 20^\circ\right) + 1 \\ &= -4\cos^3 20^\circ + 3\cos 20^\circ + 1 \end{aligned}$$

$$= -(4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ) + 1 = -\cos 60^\circ + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

4. 澄甄投資股票型基金，已知每星期結算都損失該星期初資金的 1%，若第 n 星期結算後資金總損失已超過原始資金的 $\frac{1}{3}$ ，則 n 的最小值為_____。

(其中 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ， $\log 7 = 0.8451$ ， $\log 11 = 1.0414$)

<解析>

$$\text{設原始資金為 } x，\text{ 則每星期剩下 } x(1-0.01) = \frac{99}{100}x$$

$$\text{得 } x \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^n < (1 - \frac{1}{3})x, \left(\frac{99}{100}\right)^n < \frac{2}{3}$$

$$\therefore \log\left(\frac{99}{100}\right)^n < \log\frac{2}{3}, n(\log 99 - \log 100) < \log 2 - \log 3$$

$$\rightarrow n(2\log 3 + \log 11 - 2) < \log 2 - \log 3$$

$$\rightarrow n(2 \times 0.4771 + 1.0414 - 2) < 0.3010 - 0.4771$$

$$\rightarrow n(-0.0044) < -0.1761$$

$$\therefore n > \frac{0.1761}{0.0044} = 40.02\dots, n \geq 41, n = 41$$

5. 將平面上之格子點(坐標為整數的點)如圖加以編號，

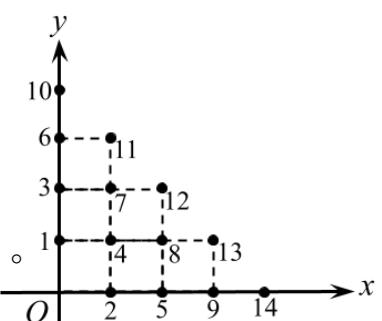
設編號第 100 號之點的坐標為 (m, n) ，則 $m^2 + n^2 =$ _____。

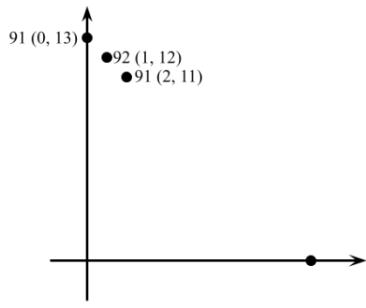
<解析>

討論 y 軸坐標規律 0、1、3、6、10、15、21、28、36、45、55、66、78、91

討論 x 軸坐標規律 0、2、5、9、14、20、27、35、44、54、65、77、90、104

故第 100 號的點為 $(13-4, 13-9) = (9, 4)$ ，則 $(m, n) = (9, 4)$ ，故 $m^2 + n^2 = 81 + 16 = 97$





編號	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
坐標	(0, 13)	(1, 12)	(2, 11)	(3, 10)	(4, 9)	(5, 8)	(6, 7)	(7, 6)	(8, 5)	(9, 4)

6. It knows a and b are the different integer and absolute value of them are less than 7.
The probability of having two unequal real roots of the equation $x^2 - ax + 2b = 0$ is

<解析>

\because 有兩個不相等的實數根， $D > 0 \Rightarrow a^2 - 8b > 0$ ， $b < \frac{a^2}{8}$

且 $0 \leq |a| < 7$ ， $0 \leq |b| < 7$

$\therefore a=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ ，共有 13 種選法，且 a 和 b 相異

共有 $a \times b = 13 \times 12 = 156$ 種選法。

① 當 $a=6$ ， $b=-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ ，共 11 種

當 $a=-6$ ， $b=-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ ，共 10 種

② 當 $a=5$ ， $b=-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ，共 10 種

當 $a=-5$ ， $b=-6, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ，共 9 種

③ 當 $a=4$ ， $b=-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$ ，共 8 種

當 $a=-4$ ， $b=-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$ ，共 7 種

④ 當 $a=3$ ， $b=-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$ ，共 8 種

當 $a=-3$ ， $b=-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$ ，共 7 種

⑤ 當 $a=2$ ， $b=-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$ ，共 7 種

當 $a=-2$ ， $b=-6, -5, -4, -3, -2, 0$ ，共 6 種

⑥ 當 $a=1$ ， $b=-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$ ，共 7 種

當 $a=-1$ ， $b=-6, -5, -4, -3, -2, 0$ ，共 6 種

⑦ 當 $a=0$ ， $b=-6, -5, -4, -3, -2, -1$ ，共 6 種

共有 $11+10+10+9+8+7+8+7+7+6+7+6+6=102$ 種，故機率 $= \frac{102}{156} = \frac{17}{26}$

7. If the consecutive positive integers from 1 to 1000 are written in order, a total of _____ zeros are written.

<解析>

①恰含 1 個 0, $\square 0 \rightarrow 9$ 個； $\square\square 0 \rightarrow 9 \times 9 = 81$ 個； $\square 0\square \rightarrow 9 \times 9 = 81$ 個

共有 $9 + 81 + 81 = 171$ 個

②恰含 2 個 0, $\square 00 \rightarrow 9$ 個

③恰含 3 個 0, $\square 000 \rightarrow 1$ 個

共有 $171 \times 1 + 9 \times 2 + 3 \times 1 = 192$

8. 將 8 男 5 女中選出 3 男 3 女做直線排列，且同性相鄰，有_____種排法。

<解析>

$C_8^3 \times C_5^2 \times 2 \times 3! \times 3! = 56 \times 10 \times 2 \times 6 \times 6 = 40320$ 種。

三、計算題(每題 10 分，共 20 分)

1. Given that a, b, c are three distinct real numbers and $a+b+c \neq 0$.

Prove that $(a+b+c)$ and $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ have the same sign.

<解析>

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) = \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)] \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2] \end{aligned}$$

且 a, b, c 為相異實數 $\rightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 > 0$

$\therefore a+b+c$ 與 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 同號

2. a, b 均為實數，則 $a^2+b^2+(1-2a-3b)^2$ 的最小值為多少？此時數對 $(a, b)=?$

<解析>

令 $c=1-2a-3b$, $2a+3b+c=1$

求 $a^2+b^2+c^2$ 之最小值， $(a^2+b^2+c^2)(2^2+3^2+1^2) \geq (2a+3b+c)^2$

$\therefore (a^2+b^2+c^2) \times 14 \geq 1$, $(a^2+b^2+c^2) \geq \frac{1}{14} \rightarrow$ 最小值 $\frac{1}{14}$

當 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{1-2a-3b}{1} \rightarrow \begin{cases} 3a-2b=0 \\ 5a+6b=2 \end{cases}$, 得 $a=\frac{1}{7}$, $b=\frac{3}{14}$, 則 $(a, b)=(\frac{1}{7}, \frac{3}{14})$