第二十屆IMC國際數學競賽台灣區複賽
Twentieth International Mathematics Contest(Taiwan)

高中二年級試卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：____________ 准考證號碼：____________ 試題總分：____________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績!

◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績!

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	C	A	B	C	D	C
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	12	118	20	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{5},-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$	-9	100	4497

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. $\triangle ABC$ 中，$\overline{CA}=3$，$\overline{CB}=5$，$\angle ACB=120^{\circ}$，則下列敘述何者錯誤?

(A)$\overline{AB}=7$ (B)$\triangle ABC$ 面積$=\frac{15}{4}$ (C)A 到$\overline{BC}$的距離為$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (D)$\overline{BC}$邊上的中線長為$\frac{\sqrt{91}}{2}$

<解析>

餘弦定理: $\overline{AB}^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\cos120^{\circ}\rightarrow\overline{AB}^2=9+25+15$，$\overline{AB}=7$

$\triangle ABC$ 面積$=\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin120^{\circ}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

選 B。

2. 若 x 為任意實數，求 $y=\sqrt{x^2+4x+13}+\sqrt{x^2-6x+45}$的最小值為________。

(A) $\sqrt{96}$ (B) $\sqrt{106}$ (C) $\sqrt{116}$ (D) $\sqrt{126}$

<解析>

$y=\sqrt{x^2+4x+13}+\sqrt{x^2-6x+45}=\sqrt{(x+2)^2+9}+\sqrt{(x-3)^2+36}=\sqrt{(x+2)^2+(0-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(0+6)^2}$

看成點 $P(x, 0)$到 $A(-2, 3)$、$B(3, -6)$的距離和$\overline{PA}+\overline{PB}$

當 P、A、B 共線時，$\overline{PA}+\overline{PB}$的最小值為$\overline{AB}=\sqrt{5^2+9^2}=\sqrt{106}$，選 B。

3. 已知正實數 x、y 滿足 $2x^2-xy-y^2=2025$，則 $2x-y$ 的最小值為________。

(A)54 (B)63 (C)60 (D)57

<解析>

$\because 2x^2-xy-y^2=2025$

$\therefore (2x+y)(x-y)=2025$

令 $2x+y=m$，$x-y=n$，則 m、$n>0$，且 $mn=2025$

得解: $x=\frac{m+n}{3}$，$y=\frac{m-2n}{3}$

則 $2x-y=\frac{m+n}{3}-\frac{m-2n}{3}=\frac{m+4n}{3}\geq\frac{2\sqrt{4mn}}{3}=\frac{4\sqrt{mn}}{3}=\frac{4\sqrt{2025}}{3}=60$，選 C。

4. 求解 $\frac{2x-3}{x+3}-3\leq 0$，得________。
(A) $x>-3$ 或 $x\leq-12$　(B) $x>3$ 或 $x\leq-12$　(C) $-12\leq x<-3$　(D) $-12\leq x<3$

<解析>

$\frac{2x-3}{x+3}-3\leq 0 \Rightarrow \frac{2x-3-3x-9}{x+3}\leq 0$，$\frac{-x-12}{x+3}\leq 0$

$\therefore \frac{x+12}{x+3}\geq 0$，$(x+12)(x+3)\geq 0$，且 $x\neq -3$

$\therefore x>-3$ 或 $x\leq -12$，選 A。

5. There are two points $A(4, 1, -4)$ and $B(10, 17, 6)$. Point P is on plane E: $3x+y-2z=7$, so that $\overline{AP}+\overline{BP}$ has a minimum value $\boldsymbol{m}$, then $\boldsymbol{m}$=________. (A)$3\sqrt{14}$ (B)$6\sqrt{14}$ (C)$4\sqrt{14}$(D)$8\sqrt{14}$

<解析>

將 $A(4, 1, -4)$、$B(10, 17, 6)$代入平面 E: $3x+y-2z=7$

$(12+1+8-7)(30+17-12-7)>0 \Rightarrow A$、$B$ 在平面 E 的同側

$A(4, 1, -4)$在平面 E: $3x+y-2z=7$ 的投影點為$(1, 0, -2)$

$\Rightarrow$ 對稱點 $A'(-2, -1, 0)$

故$\overline{AP}+\overline{BP}$最小值 $m=\overline{A'P}+\overline{BP}=\overline{A'B}=\sqrt{12^2+18^2+6^2}=6\sqrt{14}$，選 B。

6. 拋物線 $y=x^2-ax+a-1$ 之圖形恆在 $y=x-2$ 之上方，求 a 之範圍?
(A)$a<-1$　(B)$a>-1$　(C)$-1<a<3$　(D)$1<a<3$

<解析>

任意 $x\in R$，$x^2-ax+a-1>x-2$ 恆成立

$x^2+(-a-1)x+(a+1)>0$

$\because D=(-a-1)^2-4(a+1)<0$

$\therefore a^2-2a-3<0$，$(a-3)(a+1)<0$

$\therefore -1<a<3$，選 C。

7. 已知 $4^x=5$，則 8^x=________。
(A) $\sqrt{5}$　(B) $2\sqrt{5}$　(C) $3\sqrt{5}$　(D) $5\sqrt{5}$

<解析>

$4^x=5 \Rightarrow 2^{2x}=5$，$2^x=\sqrt{5}$

則 $8^x=(2^3)^x=(2^x)^3=(\sqrt{5})^3=5\sqrt{5}$，選 D。

8. The solution of a inequality $x^{x\sqrt{x}}>(x\sqrt{x})^x$ is $x>a$ or $b<x<c$. To find $4a+b+6c$=________. (A)13 (B)14 (C)15 (D)16

<解析>

$x^{x\sqrt{x}}=x^{x^1 x^{\frac{1}{2}}}=x^{x^{\frac{3}{2}}}$

$(x\sqrt{x})^x=x^x\cdot x^{\frac{x}{2}}=x^{\frac{3x}{2}}$

$x^{x^{\frac{3}{2}}}>x^{\frac{3x}{2}}$

①$x>1$，$x^{\frac{3}{2}}>\frac{3x}{2}$，$2x^{\frac{3}{2}}>3x$，$4x^3>9x^2$，$4x>9$，$x>\frac{9}{4}$

②$1>x>0$，$x^{\frac{3}{2}}<\frac{3x}{2}$，$2x^{\frac{3}{2}}<3x$，$4x^3<9x^2$，$4x<9$，$x<\frac{9}{4}\rightarrow 1>x>0$

$\therefore a=\frac{9}{4}$，$b=0$，$c=1$，則 $4a+b+6c=4\times\frac{9}{4}+0+6=15$，選 C。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. If the mean of numerical data $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ is 15, and the standard deviation is 4, if $y_i=-3x_i+1$, ($i=1, 2, 3, \ldots\ldots, n$), find the standard deviation (標準差) of $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$ to be ________.

<解析>

$\because y_i=-3x_i+1$

$\therefore \sigma_y=|-3|\sigma_x=4\times 3=12$

2. 工廠要生產零件 2024 個，需要 7 天完成，每天都比前一天的產量多，且已知第一天的產量不少於 45 個，第三天產量是第一天和第二天產量之和，之後的每一天的產量都是前兩天的產量之和，問第三天的產量是________個。

<解析>

設第 1 天到第 7 天的產量分別為 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6、a_7

且 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=2024$---①

$a_3=a_1+a_2$

$a_4=a_2+a_3=a_2+a_1+a_2=a_1+2a_2$

$a_5=a_3+a_4=a_1+a_2+a_1+2a_2=2a_1+3a_2$

$\therefore a_6=3a_1+5a_2$、$a_7=5a_1+8a_2$

由①得: $13a_1+20a_2=2024$

得解 $a_1=\frac{2024-20a_2}{13}=\frac{13\times155+9-13a_2-7a_2}{13}=155-a_2+\frac{9-7a_2}{13}$

取 $a_2=5\rightarrow a_1=155-5-2=148$

令 $a_1=148+20k$，$a_2=5-13k$ (k 為整數)

$148+20k\geq 45$ 且 $142+20k<5-13k$ ➔ $-5\frac{3}{20}\leq k<-4\frac{5}{33}$

取 $k=-5$ ➔ $a_1=48$，$a_2=70$，$a_3=48+70=118$

3. 已知 $\log a+\log b=2$，求 $10^{\log a}+10^{\log b}$ 之最小值為________。

<解析>

$\frac{10^{\log a}+10^{\log b}}{2}\geq\sqrt{10^{\log a}\times10^{\log b}}$ ➔ $\frac{10^{\log a}+10^{\log b}}{2}\geq\sqrt{10^{\log a+\log b}}$，$\frac{10^{\log a}+10^{\log b}}{2}\geq\sqrt{10^2}=10$

$\therefore 10^{\log a}+10^{\log b}\geq 20$

4. 假設 $0^\circ<\theta<45^\circ$，若 $1+\sin^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$，求 $\tan\theta=$________。

<解析>

$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

原式$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$

➔ $2\sin^2\theta-3\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=0$

$\because \cos\theta\neq0$，兩邊同除 $\cos^2\theta$ ➔ $2\tan^2\theta-3\tan\theta+1=0$

$(2\tan\theta-1)(\tan\theta-1)=0$

$\therefore \tan\theta=\frac{1}{2}$ 或 $\therefore \tan\theta=1$(不合，$0^\circ<\theta<45^\circ$)

5. There are two points $A(1, 0, 1)$, $B(-1, -2, 0)$ and a plane E:x+y+z=0 in space. Then the coordinates (坐標) of the intersection (交點) of straight line $\overleftrightarrow{AB}$ and plane E are________.

<解析>

設交點坐標$(1-2t, -2t, 1-t)$

代入$(1-2t)-2t+(1-t)=0$，$t=\frac{2}{5}$

故交點坐標$(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$

6.若 A、B、C 三點共線，P 點為線外一點，且$4\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+x\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CA}$，則 x=________。

<解析>

$4\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+x\overrightarrow{PC}=2(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})$

$\therefore 2\overrightarrow{PA}=-5\overrightarrow{PB}+(-x-2)\overrightarrow{PC}$，$\overrightarrow{PA}=-\frac{5}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{(-x-2)}{2}\overrightarrow{PC}$

且 A、B、C 三點共線➔$-\frac{5}{2}+\frac{-x-2}{2}=1$，$x=-9$

7. 平面上有兩點 $A(-1, 0)$、$B(1, 0)$，在圓 C: $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上取一點 P，則$|\overline{AP}|^2+|\overline{BP}|^2$ 的最大值為________。

<解析>

設 $P(x, y)$

$|\overline{AP}|^2+|\overline{BP}|^2=(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=2(x^2+y^2+1)=2\overline{OP}^2+2$

且$\overline{OP}\leq\sqrt{3^2+4^2}+2=7$

則$|\overline{AP}|^2+|\overline{BP}|^2\leq 2\times 7^2+2=100$

8. 若函數 $f(x)$滿足 $f(93)=93$ 且對每一正整數 n，$f(n)+f(n+3)=n^2$ 恆成立，則 $f(30)$=
________。

<解析>

$$\begin{array}{rl} & f(n)+f(n+3)=n^2 \\ -) & f(n+3)+f(n+6)=(n+3)^2 \\ \hline \end{array}$$

$f(n)-f(n+6)=-6n-9$

$\therefore$ $f(30)-f(36)=-6\times 30-9$

$f(36)-f(42)=-6\times 36-9$

…………..

$$\begin{array}{rl} +) & f(84)-f(90)=-6\times 84-9 \\ \hline \end{array}$$

$f(30)-f(90)=-6(30+36+\ldots+84)-90=-3510$

且 $f(90)+f(93)=90^2$

$\therefore f(90)=8007$，$f(30)=4497$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分) ※未寫出計算過程不予計分

1. 空間中四點 $A(1, 1, 2)$、$B(-1, 0, 3)$、$C(3, k, 1)$、$D(2, 0, -1)$，若四面體 $ABCD$ 的體積為 5，則實數 k 值為何? [提示:四面體體積=$\frac{1}{6}$×平行六面體體積]

<解析>

$\overrightarrow{AB}=(-2, -1, 1)$

$\overrightarrow{AC}=(2, k-1, -1)$

$\overrightarrow{AD}=(1, -1, -3)$

四面體 $ABCD$ 的體積$=\frac{1}{6}\times\left|\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & k-1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}\right|=5$

➔$|5k-10|=30$，$|k-2|=6$，$k=8$ 或-4

2. Assume $\boldsymbol{p}$ is a prime number. If both roots of the equation x^2-$\boldsymbol{p}x$-580$\boldsymbol{p}$=0 are integers, then $\boldsymbol{p}$ =________.

<解析>

$x^2-px-580p=0$

$\therefore x=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4\times1\times(-580p)}}{2}=\frac{p\pm\sqrt{p^2+2^4\times5\times29\times p}}{2}\in Z$

$D=p^2+2^4\times5\times29\times p$是完全平方數

①$p=2$➔ $D=2^2+2^4\text{x}5\text{x}29\text{x}2=2^2\text{x}(1+2^3\text{x}5\text{x}29)=2^2\text{x}1161$ 不是完全平方數

②$p=5$➔ $D=5^2+2^4\text{x}5\text{x}29\text{x}5=5^2\text{x}(1+2^4\text{x}29)=5^2\text{x}465$ 不是完全平方數

③$p=29$➔ $D=29^2+2^4\text{x}5\text{x}29\text{x}29=29^2\text{x}(1+2^4\text{x}5)=29^2\text{x}9^2$ 是完全平方數

$\therefore x=\frac{29\pm29\times9}{2}\in Z$，則 $p=29$