

第二十屆  國際數學競賽台灣區複賽
Twentieth International Mathematics Contest(Taiwan)

國
中
二
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：_____ 准考證號碼：_____ 試題總分：_____

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績！
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	A	B	B	C	D	D	B
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	25	15	33	-6	3	7125	-4	$\frac{1}{4}$

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 若 $|x-y-2|$ 與 $x^2y^2-xy+\frac{1}{4}$ 互為相反數，則 $(x+y)^2$ 的值为()。(A)6 (B)7 (C)8 (D)9

<解析>

$$|x-y-2|+x^2y^2-xy+\frac{1}{4}=0, |x-y-2|+(xy-\frac{1}{2})^2=0, \text{得 } x-y=2, xy=\frac{1}{2}$$

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=2^2+4\times\frac{1}{2}=6, \text{選 A。}$$

2. 設 a 、 b 兩數滿足 $a^2=4a+9$ ， $b^2=4b+9$ ，且 $a \neq b$ ，則 $\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b}$ 之值为_____。

(A) $-\frac{172}{9}$ (B) $\frac{172}{9}$ (C) $-\frac{172}{7}$ (D) $\frac{172}{7}$

<解析>

$a^2-4a-9=0$ 、 $b^2-4b-9=0$ ， a 、 b 都是 $x^2-4x-9=0$ 的根

$$a+b=\frac{-4}{1}=4$$

$$ab=\frac{-9}{1}=-9$$

$$\text{則 } a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4^2-2\times(-9)=34$$

$$\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} = \frac{a^3+b^3}{ab} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab} = \frac{4\times(34+9)}{-9} = \frac{-172}{9}, \text{選 A。}$$

3. It is known that the integer part of $\sqrt{23}-1$ is a and the decimal part is b , then the value of $4a+3b$ is _____. (A) $2\sqrt{23}$ (B) $3\sqrt{23}$ (C) $4\sqrt{23}$ (D) $5\sqrt{23}$

<解析>

$$\text{整數部分 } a=\sqrt{23}-1=4-1=3$$

$$\text{小數部分 } b=\sqrt{23}-1-3=\sqrt{23}-4$$

$$\therefore 4a+3b=4\times 3+(\sqrt{23}-4)\times 3=3\sqrt{23}, \text{選 B。}$$

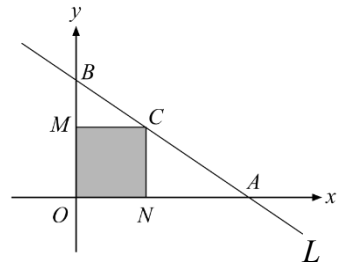
4. 在坐標平面上，直線 $L: 4x+5y=20$ 交 x 軸於 A 點，交 y 軸於 B 點，且 C 點在 \overline{AB} 上，四邊形 $CMON$ 為正方形，則 C 點的 x 坐標為何? (A) $\frac{19}{9}$ (B) $\frac{20}{9}$ (C) $\frac{24}{5}$ (D) $\frac{22}{5}$

<解析>

設 C 點坐標 (a, a)

$$4a+5a=20$$

$$a=\frac{20}{9}, \text{ 選 B.}$$



5. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=60^\circ$ \overline{AD} 平分 $\angle BAC$ 交 \overline{BC} 於 D 點， \overline{CE} 平分 $\angle ACB$ 交 \overline{AB} 於 E 點， \overline{AD} 、 \overline{CE} 交於 F 點，若 $\overline{AB}=2\overline{AE}$ ，則 $\angle BEC=?$
(A) 85° (B) 88° (C) 90° (D) 92°

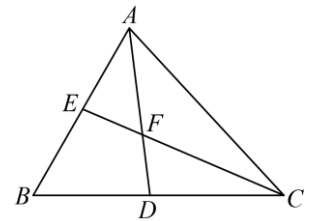
<解析>

$\because \overline{CE}$ 平分 $\angle ACB \rightarrow \angle ACB = \angle BCE$ ，且 E 為 \overline{AB} 之中點

$\triangle CAB$ 是等腰三角形 $\rightarrow \overline{AC} = \overline{BC}$ 且 $\angle ABC = 60^\circ$

$\therefore \triangle CAB$ 是正三角形

則 \overline{CE} 是正三角形上的高 $\rightarrow \angle BEC = 90^\circ$ ，選 C。



6. 如圖，在直角坐標系中， $A(2, -7)$ 、 $B(6, -1)$ 、 $C(c, 0)$ 、 $D(0, d)$ ，則四邊形 $ABCD$ 周長最小值為_____。(A) $4\sqrt{2}+2\sqrt{13}$ (B) $5\sqrt{2}+6\sqrt{13}$
(C) $7\sqrt{2}+3\sqrt{13}$ (D) $8\sqrt{2}+2\sqrt{13}$

<解析>

對 y 軸，求 A 的對稱點 $A'(-2, -7)$

對 x 軸，求 B 的對稱點 $B'(6, 1)$

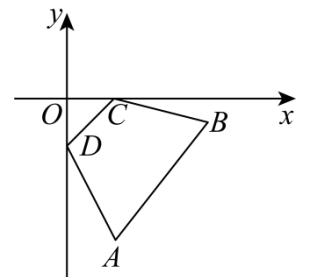
$$y=ax+b$$

$$-7=-2a+b$$

$$1=6a+b$$

$8=8a$ ， $a=1$ ， $b=5 \rightarrow y=x-5$ (當 C 、 D 移動到 $A'B'$ 的直線方程上，即四點共線)

$$\text{周長} = \overline{AB} + \overline{A'B'} = \sqrt{(6-2)^2 + (-1+7)^2} + \sqrt{(-2-6)^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{16+36} + \sqrt{64+64} = 2\sqrt{13} + 8\sqrt{2}, \text{ 選 D.}$$



7. 甲、乙、丙、丁、戊、己共有 6 人排成一列，甲不排在第三位且乙不排在第五位，有幾種排法? (A) 516 (B) 498 (C) 510 (D) 504

<解析>

全部情況-甲排第三位或乙排第五位的情況

$$= 6! - (5! + 5! - 4!) = 720 - (120 + 120 - 24) = 504, \text{ 選 D.}$$

8. If the two roots of the polynomial equation $ax^2+bx+41=0$ with integer coefficients are different integers, and $a>0, b<0$, then $b=$ _____. (A)42 (B)-42 (C)43 (D)-43

<解析>

令兩相異整數根 $\alpha、\beta$

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}, \alpha\beta=\frac{41}{a}$$

→ $a=1、-1、41、-41$ (取正)

$$\textcircled{1} a=1, \alpha\beta=\frac{41}{1}=41=1\times 41=(-1)\times(-41)$$

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{1}=42 \text{ 或 } -42 \rightarrow b=-42 \text{ 或 } 42 \text{ (不合)}$$

$$\textcircled{2} a=41, \alpha\beta=\frac{41}{41}=1=1\times 1=(-1)\times(-1) \text{ (不合), 選 B。}$$

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 乘積 $1\times 3\times 5\times 7\times \dots\times 2021\times 2023\times 2025$ 的末兩位數字是_____。

<解析>

令 $a=1\times 3\times 5\times \dots\times 2021\times 2023\times 2025=25\times$ 某個奇數 x

奇數 $x\div 4$ 餘 1 或 3 $\Rightarrow x=4k+1$ 或 $4k+3$

$$\textcircled{1} x=4k+1 \Rightarrow a=25\times(4k+1)=100k+25$$

$$\textcircled{2} x=4k+3 \Rightarrow a=25\times(4k+3)=100k+75$$

$$(1\times 3\times 5\times 7)\div 4 \text{ 餘 } 1 \text{ [即}(1\times 3\times 1\times 3)\div 4 \text{ 餘 } 1]$$

$$(9\times 11\times 13\times 15)\div 4 \text{ 餘 } 1 \text{ [即}(1\times 3\times 1\times 3)\div 4 \text{ 餘 } 1]$$

$$(17\times 19\times 21\times 23)\div 4 \text{ 餘 } 1 \text{ [即}(1\times 3\times 1\times 3)\div 4 \text{ 餘 } 1]$$

.....

$$(2017\times 2019\times 2021\times 2023)\div 4 \text{ 餘 } 1 \text{ [即}(1\times 3\times 1\times 3)\div 4 \text{ 餘 } 1]$$

$$2025\div 4 \text{ 餘 } 1$$

$$\therefore a=1\times 3\times 5\times \dots\times 2021\times 2023\times 2025\div 4 \text{ 餘 } 1\times 1\times 1\times \dots\times 1\times 1=1$$

$$a=100k+25, \text{ 末兩位數是 } 25$$

2. 如圖，點 P 為等邊 $\triangle ABC$ 外一點，且 $\overline{PA}=6, \overline{PB}=9$ ，則 \overline{PC} 的最大值為_____。

<解析>

將 $\triangle PAB$ 繞 B 點順時針旋轉 60 度，到 $\triangle CP'B$ ，連接 $\overline{PP'}$

$$\text{即 } \overline{BP}=\overline{BP'}$$

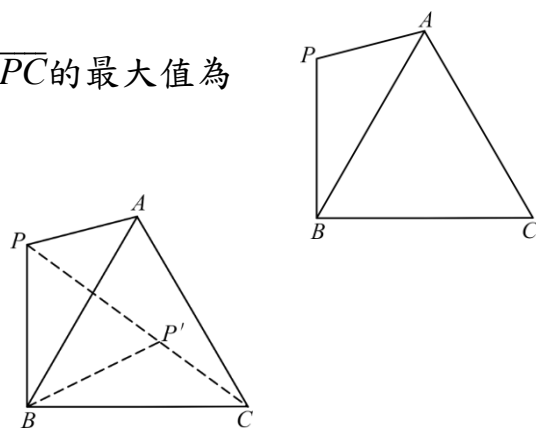
$$\overline{P'C}=\overline{PA}=6$$

$$\angle PBP'=60^\circ$$

$\therefore \triangle PBP'$ 為等邊三角形

$$\overline{PP'}=\overline{PB}=9$$

$\therefore \overline{PP'}+\overline{P'C}=6+9=15$ ，當 $P、P'、C$ 共線時 \overline{PC} 最大，最大值 $=15$



3. 求出 999936 的質因數，由小到大依序為 a 、 b 、 c 、 d ，求 $a+d=$ _____。

<解析>

$$\begin{aligned} 999936 &= 10^6 - 64 = 10^6 - 2^6 = (10^3 - 2^3)(10^3 + 2^3) \\ &= (10 - 2)(10^2 + 10 \times 2 + 2^2)(10 + 2)(10^2 - 10 \times 2 + 2^2) \\ &= 8 \times 124 \times 12 \times 84 \\ &= 2^9 \times 3^2 \times 7 \times 31 \end{aligned}$$

質因數 = 2、3、7、31，則 $a+d=2+31=33$

4. The remainder of $(4x^2+ax-3) \div (2x-1)$ is -5, then $a=$ _____.

<解析>

$$(4x^2+ax-3) = (2x-1)Q(x) - 5$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{2}, \text{ 代入 } 1 + \frac{1}{2}a - 3 = -5, \frac{1}{2}a = -3, a = -6$$

5. 比例函數 $y=kx$ (k 為整數) 與直線 $y=x+7$ 的交點坐標恰好是格點(橫、縱座標都是整數的點稱為格點)，那麼滿足條件的正比例函數有_____個。

<解析>

$$kx = x + 7$$

$(k-1)x = 7$ ，且 x 是整數

$$k-1=1 \quad x=7 \quad \text{或} \quad k-1=-1 \quad x=-7 \quad \text{或} \quad k-1=7 \quad x=1 \quad \text{或} \quad k-1=-7 \quad x=-1$$

$$\text{即 } k=2 \quad x=7 \quad \text{或} \quad k=0 \quad x=-7 \quad \text{或} \quad k=8 \quad x=1 \quad \text{或} \quad k=-6 \quad x=-1$$

且 $k=0$ 不合

符合正比例函數有 3 個

6. 有一個自然數，將它的最左邊的數字刪除後得到一個新數，若原數為新數的 57 倍，求滿足這個條件的最小自然數為_____。

<解析>

$$\text{原 } \boxed{x}\boxed{y} = x \times 10^n + y$$

$$\text{新 } \boxed{y} = y$$

$$x \times 10^n + y = 57y \rightarrow x \times 10^n = 56y, x \times (2 \times 5)^n = 2^3 \times 7y$$

$$\text{原數最小} \rightarrow n=3, x \times (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 7y, 125x = 7y$$

$$\therefore x=7, y=125, \text{ 則原數} = 7125$$

7. 設 p 、 q 是整數，方程 $x^2+px+q=0$ 的一根是 $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ ，則 $pq=$ _____。

<解析>

$$x = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1, \text{ 故另一根為 } -\sqrt{3}-1$$

$$x = -\sqrt{3}-1, x+1 = -\sqrt{3}, (x+1)^2 = 3, x^2+2x+1=3, x^2+2x-2=0$$

$$p=2, q=-2, \text{ 則 } pq=2 \times (-2) = -4$$

8. 已知 $x=1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ ，則 $\frac{3}{4x}+\frac{3}{2x^2}+\frac{1}{x^3}$ 的值为_____。

$$[a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)、(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3]$$

<解析>

$$\frac{1}{x} = \frac{(\sqrt[3]{3}-1)}{(\sqrt[3]{3}-1)(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})} = \frac{(\sqrt[3]{3}-1)}{2}$$

$$\frac{3}{4x} + \frac{3}{2x^2} + \frac{1}{x^3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分) ※未寫出計算過程不予計分

1. 職棒聯盟規定球隊的勝率達到 6 成以上(含 6 成)即算晉級，北極熊隊在前 40 場比賽中，勝率是 4 成 5，請問：

(1) 北極熊隊前 40 場比賽中，輸了幾場？

(2) 那麼至少再比賽幾場，北極熊隊才有可能晉級？

<解析>

$$(1) 40 \times \frac{45}{100} = 18, 40 - 18 = 22$$

(2) 假設至少比賽 x 場，每場均獲勝

$$\frac{18+x}{40+x} \geq \frac{3}{5}, 90+5x \geq 120+3x, 2x \geq 30, x \geq 15$$

至少比賽 15 場

2. If $a, b, \frac{3b-1}{a}, \frac{3a-1}{b}$ are all positive integers, and $a > 1, b > 1$, find all possible values of $a+b$.

<解析>

$$\frac{3b-1}{a} = x, \frac{3a-1}{b} = y, \text{ 且 } x, y \text{ 為正整數}$$

$$\frac{3b-1}{a} = x \rightarrow ax = 3b-1; \frac{3a-1}{b} = y \rightarrow by = 3a-1$$

$$ax \times by = (3a-1)(3b-1) = 9ab - 3(a+b) + 1 \rightarrow ab(9-xy) = 3(a+b) - 1$$

$$\therefore ab | 3(a+b) - 1, \text{ 令 } 1 < a \leq b (2 < a+b)$$

$$ab \leq 3(a+b) - 1 < 6b, \text{ 故 } 1 < a \leq 5, \text{ 取 } a=2, 3, 4, 5$$

當 $a=2$ ， $b | 3 \times 2 - 1 = 5$ ， $b \geq a=2$ ，故 $b=5$ ，則 $3b-1=14$ 是 2 的倍數，故 $a+b=2+5=7$

當 $a=3$ ， $3 | 3 \times b - 1$ 不成立

當 $a=4$ ， $b | 3 \times 4 - 1 = 11$ ， $b \geq a=4$ ，故 $b=11$ ，則 $3b-1=32$ 是 4 的倍數，故 $a+b=4+11=15$

當 $a=5$ ， $b | 3 \times 5 - 1 = 14$ ， $b \geq a=5$ ，故 $b=7$ 或 14

① $b=7$ ，則 $3b-1=20$ 是 5 的倍數，故 $a+b=5+7=12$

② $b=14$ ，則 $3b-1=41$ 不是 5 的倍數

所以 $a+b=7, 12$ 或 15