第二十屆 IMC 國際數學競賽台灣區複賽
Twentieth International Mathematics Contest(Taiwan)

國
中
一
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：______________ 准考證號碼：______________ 試題總分：______________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績!
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績!

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	B	B	B	A	B	D
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	48	25	5	172872	-3	0	144	7125

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. 若 $k\div\frac{117}{80}$與 $k\times\frac{52}{45}$均為正整數，則 k 的最小值為多少?
(A) $\frac{585}{4}$ (B) $\frac{583}{4}$ (C) $\frac{581}{4}$ (D) $\frac{579}{4}$

<解析>

$k\div\frac{117}{80}=k\times\frac{80}{117}$ 與 $k\times\frac{52}{45}$，且為正整數

分子: [117, 45]=585

分母:(80, 52)=4

k 的最小值$=\frac{585}{4}$，選 A。

2.已知等邊△ABC 的高為 10，在這個三角形內有一點 P，若點 P 到直線 AB 的距離是 1，點 P 到直線 AC 的距離是 3，則點 P 到直線 BC 的距離可能是________。(A)4 (B)5 (C)6 (D)7

<解析>

設邊長$=a$，$10\times a\times\frac{1}{2}=a\times3\times\frac{1}{2}+a\times1\times\frac{1}{2}+a\times\square\times\frac{1}{2}$

$\square=10-3-1=6$，選 C。

3. There are two points $A(a)$ and $B(b)$ on the number line, $a>b$. The distances between A and B are equal to the origin, and $|a-b|=14$, then $2a-3b=$______.
(A)-7 (B)35 (C)7 (D)70

<解析>

a、b 互為相反數

$|a-b|=14$，且 $a>b$

$a=7$，$b=-7$

$\therefore 2a-3b=14-(-21)=35$，選 B。

4. 某商場為招攬顧客，貼出優惠告示：一次性購物不超過 200 元的一律九折優惠，超過 200 元的，其中 200 元按九折算，超過 200 元的部分按八折算。蘇老師到該商場購物三次，第一次購物付款 170 元，第二次購物付款 230 元，三次共優惠了 87 元。則蘇老師第三次到該商場購物實際付款__________元。(A)300 (B)320 (C)340 (D)360

<解析>

$170\times(1-0.9)=17$，$200\times(1-0.9)+30\times(1-0.8)=20+6=26$

$87-17-26=44$

第三次實際付款$=200+(44-20)\div(1-0.8)=320$，選 B。

5. 設 a、b、c 是互不相等的實數，且$a+\frac{3}{b}=b+\frac{3}{c}=c+\frac{3}{a}$，則 $a^2b^2c^2=$__________。(A)24 (B)27 (C)30 (D)33

<解析>

$a+\frac{3}{b}=b+\frac{3}{c}$ ➔ $a-b=\frac{3}{c}-\frac{3}{b}=\frac{3b-3c}{bc}$，$bc=\frac{3(b-c)}{a-b}$

同理$ac=\frac{3(c-a)}{b-c}$，$ab=\frac{3(a-b)}{c-a}$

得到 $a^2b^2c^2=\frac{3(c-a)}{b-c}\times\frac{3(b-c)}{a-b}\times\frac{3(a-b)}{c-a}=27$，選 B。

6. 若$|x-y-2|$與 $x^2y^2-xy+\frac{1}{4}$互為相反數，則$(x+y)^2$的值為(　　)。(A)6 (B)7 (C)8 (D)9

<解析>

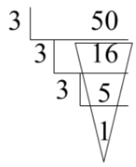
$|x-y-2|+x^2y^2-xy+\frac{1}{4}=0$，$|x-y-2|+(xy-\frac{1}{2})^2=0$，得 $x-y=2$，$xy=\frac{1}{2}$

$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=2^2+4\times\frac{1}{2}=6$，選 A。

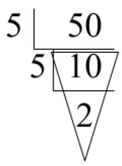
7.滿足「45^n是 50!的因數」的最大自然數 $n=$_______。(A)10 (B)11 (C)12 (D)13

<解析>

①$45=3^2\times5$



$16+5+1=22$



$10+2=12$

$50!=2^{\square}\times3^{22}\times5^{12}\times$………

②$45^n=(3^2\times5)^n=3^{2n}\times5^n$ 是 $50!=2^{\square}\times3^{22}\times5^{12}\times$…..的因數

$\rightarrow 2n\le22$，$n\le12\rightarrow n\le11$，$n\le12\rightarrow n\le11$

最大的自然數為 11，選 B。

8. 甲、乙、丙、丁、戊共有 5 人排成一列，且甲不排在第一位，且乙不排在第二位，有幾種排法?(A)72 (B)84 (C)60 (D)78

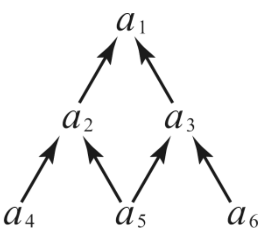
<解析>

全部的情況-甲排在第 1 位或乙排在第 2 位

$=5!-(4!+4!-3!)=78$，選 D。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 六個互不相等的正整數 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6 按如圖所示的方式排列，箭頭所指向的數等於指向它的兩個數的乘積，例如 $a_1= a_2 a_3$，則 a_1 的最小值是________。



<解析>

$a_1= a_2 a_3$，$a_2= a_4 a_5$，$a_3= a_5 a_6$

則 $a_1= a_4 a_5^2 a_6 \geq 3\times2^2\times4=48$

2. 乘積 $1\times3\times5\times\ldots.\times2021\times2023\times2025$ 的末兩位數字是__________。

<解析>

令 $a=1\times3\times5\times\cdots.\times2021\times2023\times2025=25\times$某個奇數 x

奇數 $x\div4$ 餘 1 或 $3\Rightarrow x=4k+1$ 或 $4k+3$

①$x=4k+1\Rightarrow a=25\times(4k+1)=100k+25$

②$x=4k+3\Rightarrow a=25\times(4k+3)=100k+75$

$(1\times3\times5\times7)\div4$ 餘 1 [即$(1\times3\times1\times3)\div4$ 餘 1]

$(9\times11\times13\times15)\div4$ 餘 1 [即$(1\times3\times1\times3)\div4$ 餘 1]

$(17\times19\times21\times23)\div4$ 餘 1 [即$(1\times3\times1\times3)\div4$ 餘 1]

…….

$(2017\times2019\times2021\times2023)\div4$ 餘 1 [即$(1\times3\times1\times3)\div4$ 餘 1]

$2025\div4$ 餘 1

$\therefore a=1\times3\times5\times\cdots.\times2021\times2023\times2025\div4$ 餘 $1\times1\times1\times\cdots.\times1\times1=1$

$a=100k+25$，末兩位數是 25

3. 學校組織學生進行足球比賽，記分辦法是：勝 1 場得 3 分，平 1 場得 1 分，負 1 場得 0 分。在這次比賽中，七年級（1）班代表隊比賽了 7 場得 16 分，且平的場數是負的場數的正整數倍，則七年級（1）班代表隊勝的場數為__________場。

<解析>

假設負場$=x$，平場$=ax$，勝場$=7-ax-x$

$3\times(7-ax-x)+1\times ax+0x=16$

$21-3ax-3x+ax=16$

$3x+2ax=5$

$x(3+2a)=5$，且 a 是正整數

則 $a=1$，$x=1$，則勝場$=7-1-1=5$

4. Suppose $a=2^{\square}\times3^2\times7^4$ and 24 is a factor of a, and 112 is not a factor of a, then a =_______.

<解析>

$24=2^3\times3$

$112=2^4\times7$

$\square=3$，$a=2^3\times3^2\times7^4=172872$

5.已知 $x+y+z=0$，$xyz\neq0$，求 $x(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})+y(\frac{1}{z}+\frac{1}{x})+z(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})=$ _______ 。

<解析>

原式$=\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$

$=\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}$

$=\frac{-x}{x}+\frac{-y}{y}+\frac{-z}{z}=-1-1-1=-3$

6. Integers x, y, z satisfy $|x-y|^2+|z-x|^3=1$, then the value of $(x-y)(y-z)(z-x)$ is _______.

<解析>

$|x-y|^2+|z-x|^3=1$，得 $x-y=1$，$z-x=0$ 或 $x-y=-1$，$z-x=0$ 或 $x-y=0$，$z-x=1$

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$

7. 經濟不景氣，電子公司預計裁員若干人，若少裁 2 人，則該公司裁員 $\frac{1}{8}$；若多裁 4 人，則該公司裁員 $\frac{1}{6}$，則該公司原有員工_______人。

<解析>

設裁員 x 人

$8(x-2)=6(x+4)$

$8x-16=6x+24$

$2x=40$，$x=20$

$8\times(20-2)=144$

8. 有一個自然數，將它的最左邊的數字刪除後得到一個新數，若原數為新數的 57 倍，求滿足這個條件的最小自然數為_______ 。

<解析>

原 $\boxed{x}\boxed{y}=x\times10^n+y$

新 $\boxed{y}=y$

$x\times10^n+y=57y \Rightarrow x\times10^n=56y$，$x\times(2\times5)^n=2^3\times7y$

原數最小$\Rightarrow n=3$，$x\times(2\times5)^3=2^3\times7y$，$125x=7y$

$x=7$，$y=125$，則原數=7125

三、計算題(每題 10 分，共 20 分) ※未寫出計算過程不予計分

1. If a, b, $\frac{3b-1}{a}$, $\frac{3a-1}{b}$ are all positive integers, and a>1, b>1, find all possible values of $a+b$.

<解析>

$\frac{3b-1}{a}=x$，$\frac{3a-1}{b}=y$，且 x、y 為正整數

$\frac{3b-1}{a}=x$ ➔ $ax=3b-1$；$\frac{3a-1}{b}=y$ ➔ $by=3a-1$

$ax \times by=(3a-1)(3b-1)=9ab-3(a+b)+1 \rightarrow ab(9-xy)=3(a+b)-1$

$\therefore ab|3(a+b)-1$，令 $1<a\leq b$ $(2<a+b)$

$ab\leq 3(a+b)-1<6b$，故 $1<a\leq 5$，取 a=2、3、4、5

當 $a=2$，$b|3\times2-1=5$，$b\geq a=2$，故 $b=5$，則 $3b-1=14$ 是 2 的倍數，故 $a+b=2+5=7$

當 $a=3$，$3|3\times b-1$ 不成立

當 $a=4$，$b|3\times4-1=11$，$b\geq a=4$，故 $b=11$，則 $3b-1=32$ 是 4 的倍數，故 $a+b=4+11=15$

當 $a=5$，$b|3\times5-1=14$，$b\geq a=5$，故 $b=7$ 或 14

①b=7，則 $3b-1=20$ 是 5 的倍數，故 $a+b=5+7=12$

②b=14，則 $3b-1=41$ 不是 5 的倍數

所以 $a+b$=7、12 或 15

2.將正整數依右圖排列，排列的次序如箭頭所示。在此圖形中，我們稱橫的為列，直的為行，例如:第 5 列第 3 行的數是 19，試求 2024 這個數位於第幾行第幾列?

<解析>

第一列: 1^2、2^2、3^2、4^2、5^2、……

$2025 \fallingdotseq 45^2=2025$

2025 是第 1 列，第 45 行

向下遞減

2024 是第 2 列，第 45 行