第二十屆IMC國際數學競賽台灣區複賽

Twentieth International Mathematics Contest(Taiwan)

高
中
一
年
級
試
卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分

《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：__________ 准考證號碼：__________ 試題總分：__________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績!
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績!

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	A	B	C	C	B	C
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	3216	76、25	5	1023	20	12	$\frac{1}{210}$	118

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. Find the equation of the straight line that passes through point P (1, 6) and is perpendicular (垂直) to the straight line $x+3y+3=0$ is ______. (A)$3x-y+3=0$ (B)$x-2y+11=0$ (C)$2x+y-8=0$ (D)$4x-2y+5=0$

<解析>

$x+3y+3=0\to y=-\frac{1}{3}x-1$，斜率$=-\frac{1}{3}$

$m\times(-\frac{1}{3})=-1$，$m=3$

點斜式: $y-6=3(x-1)$，$y=3x+3$，選 A。

2. 已知 $4^x=5$，則 $8^x=$________ 。
(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $3\sqrt{5}$ (D) $5\sqrt{5}$

<解析>

$4^x=5\Rightarrow 2^{2x}=5$，$2^x=\sqrt{5}$

則 $8^x=(2^3)^x=(2^x)^3=(\sqrt{5})^3=5\sqrt{5}$，選 D。

3. 求解 $\frac{2x-3}{x+3}-3\leq 0$，得________ 。
(A) $x>-3$ 或 $x\leq -12$ (B) $x>3$ 或 $x\leq -12$ (C) $-12\leq x<-3$ (D) $-12\leq x<3$

<解析>

$\frac{2x-3}{x+3}-3\leq 0\Rightarrow\frac{2x-3-3x-9}{x+3}\leq 0$，$\frac{-x-12}{x+3}\leq 0$

$\therefore\frac{x+12}{x+3}\geq 0$，$(x+12)(x+3)\geq 0$，且 $x\neq -3$

$\therefore x>-3$ 或 $x\leq -12$，選 A。

4. Circle C:$(x-1)^2+(y-3)^2=8$, straight line L:$x+y+4=0$, the closest distance to L for any point on circle C is ________. (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $3\sqrt{2}$

<解析>

$d(O, L)=\frac{|1+3+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}$

$(x-1)^2+(y-3)^2=8 \Rightarrow r=2\sqrt{2}$

最短距離 m 為$4\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，選 B。

5. 拋物線 $y=x^2-ax+a-1$ 之圖形恆在 $y=x-2$ 之上方，求 a 之範圍?

(A)$a<-1$ (B)$a>-1$ (C)$-1<a<3$ (D)$1<a<3$

<解析>

任意 $x\in R$，$x^2-ax+a-1>x-2$ 恆成立

$x^2+(-a-1)x+(a+1)>0$

$\because D=(-a-1)^2-4(a+1)<0$

$\therefore a^2-2a-3<0$，$(a-3)(a+1)<0$

$\therefore -1<a<3$，選 C。

6. 已知正實數 x、y 滿足 $2x^2-xy-y^2=2025$，則 $2x-y$ 的最小值為________。

(A)54 (B)63 (C)60 (D)57

<解析>

$\because 2x^2-xy-y^2=2025$

$\therefore (2x+y)(x-y)=2025$

令 $2x+y=m$，$x-y=n$，則 m、$n>0$，且 $mn=2025$

得解: $x=\frac{m+n}{3}$，$y=\frac{m-2n}{3}$

則 $2x-y=\frac{m+n}{3}-\frac{m-2n}{3}=\frac{m+4n}{3}\geq\frac{2\sqrt{4mn}}{3}=\frac{4\sqrt{mn}}{3}=\frac{4\sqrt{2025}}{3}=60$，選 C。

7. 若 x 為任意實數，求 $y=\sqrt{x^2+4x+13}+\sqrt{x^2-6x+45}$的最小值為________。

(A) $\sqrt{96}$ (B) $\sqrt{106}$ (C) $\sqrt{116}$ (D) $\sqrt{126}$

<解析>

$y=\sqrt{x^2+4x+13}+\sqrt{x^2-6x+45}=\sqrt{(x+2)^2+9}+\sqrt{(x-3)^2+36}=\sqrt{(x+2)^2+(0-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(0+6)^2}$

看成點 $P(x, 0)$到 $A(-2, 3)$、$B(3, -6)$的距離和$\overline{PA}+\overline{PB}$

當 P、A、B 共線時，$\overline{PA}+\overline{PB}$的最小值為$\overline{AB}=\sqrt{5^2+9^2}=\sqrt{106}$，選 B。

8. 設函數 $f(x+5)=f(x)$對任何實數 x 都成立，當 $3<x\leq 8$ 時，$f(x)=2x+7$，則下列敘述何者錯誤?

(A) $f(5)=17$ (B) $f(-36)=15$ (C) $f(0)=0$ (D) $f(1003)=23$

<解析>

$3<x\leq 8$

① $x=5$，$f(5)=5\times 2+7=17$

② $f(-36)=f(-31)=f(-26)=f(-21)=f(-16)=f(-11)=f(-6)=f(-1)=f(4)=4\times 2+7=15$

③ $f(0)=f(5)=5\times 2+7=17$

④ $f(1003)=f(5\times 199+8)=f(8)=8\times 2+7=23$，選 C。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)

1. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚共 7 人排成一列，甲不排在第一位，乙不排在第二位，丙不排在第三位，共有________種排法。

<解析>

全部排列數-甲排第一位或乙排二位或丙排第三位的排列數

=7!-(6!+6!+6!-5!-5!-5!+4!)

=5040-(2160-360+24)

=3216 種

2. 所謂的自守數就是將它平方後會在尾巴重新出現(但 0、1 不計)，那麼一位數中很顯然的只有 5、6 是自守數，所有兩位數的自守數是________。

<解析>

令二位數 x 為自守數➔$x^2=100P+x$

$x^2-x=100P$ ➔$x(x-1)=100P=100$ 的倍數$=5^2\times2^2$ 的倍數

∴x 或$(x-1)$必有一個是 25 的倍數且另一個是 4 的倍數

①$x=25\to x-1=25-1=24$ 是 4 的倍數(合理)

②$x=50\to x-1=50-1=48$ 不是 4 的倍數(不合)

③$x=75\to x-1=75-1=74$ 不是 4 的倍數(不合)

④$x-1=25\to x=26$ 不是 4 的倍數(不合)

⑤$x-1=50\to x=51$ 不是 4 的倍數(不合)

⑥$x-1=75\to x=76$ 是 4 的倍數(合理)

∴符合條件的兩位數是 76、25

3. Suppose the integer part of $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ is $\boldsymbol{a}$ and the pure decimal part is $\boldsymbol{b}$, then the value of $a+\frac{b^2}{1-b}$ is ________.

<解析>

$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}=3+(\sqrt{3}-1)$

則整數部分 $a=3$，$b=\sqrt{3}-1$

$a+\frac{b^2}{1-b}=3+\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{1-(\sqrt{3}-1)}=3+\frac{4-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=3+2=5$

4\. 設 n 是自然數，數列<a_n>的遞迴關係式為$\begin{cases} a_1=1 \\ \frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}} (n\geq 2)\end{cases}$，若 $a_{10}=10\times\frac{t}{512}$，則實數 t 值為________。

<解析>

$a_1=1$，$\frac{a_2}{2}=\frac{a_1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，$a_2=2\times\frac{3}{2}=2\times\frac{2^2-1}{2^1}$

$\frac{a_3}{3}=\frac{a_2}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$，$a_3=3\times\frac{7}{4}=3\times\frac{2^3-1}{2^2}$

$\frac{a_4}{4}=\frac{a_3}{3}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$，$a_4=4\times\frac{15}{8}=4\times\frac{2^4-1}{2^3}$

…………….

推論: $a_n=n\times\frac{2^n-1}{2^{n-1}} \rightarrow a_{10}=10\times\frac{2^{10}-1}{2^{10-1}}=10\times\frac{1023}{512}$，則 $t=1023$

5\. 已知 $\log a+\log b=2$，求 $10^{\log a}+10^{\log b}$ 之最小值為________。

<解析>

$\frac{10^{\log a}+10^{\log b}}{2}\geq\sqrt{10^{\log a}\times 10^{\log b}} \rightarrow \frac{10^{\log a}+10^{\log b}}{2}\geq\sqrt{10^{\log a+\log b}}$，$\frac{10^{\log a}+10^{\log b}}{2}\geq\sqrt{10^2}=10$

$\therefore 10^{\log a}+10^{\log b}\geq 20$

6\. If the mean of numerical data $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is 15, and the standard deviation (標準差) is 4, if $y_i=-3x_i+1$, ($i=1, 2, 3, \ldots, n$), find the standard deviation of $y_1, y_2, \ldots, y_n$ to be ________.

<解析>

$\because y_i=-3x_i+1$

$\therefore \sigma_y=|-3|\sigma_x=4\times 3=12$

7\. 許小姐在提款時忘了帳號密碼，但她還記得密碼的七位數字中，有兩個 3，三個 5，兩個 9，於是她就用這七個數字隨意排成一個七位數輸入提款機嘗試，則她只試一次就成功的機率是________。

<解析>

重複組合: $\frac{7!}{2!3!2!}=210$

嘗試一次完成的機率$=\frac{1}{210}$

8. 工廠要生產零件 2024 個，需要 7 天完成，每天都比前一天的產量多，且已知第一天得產量不少於 45 個，第三天產量是第一天和第二天產量之和，之後的每一天的產量都是前兩天的產量之和，問第三天的產量是________個。

<解析>

設第 1 天到第 7 天的產量分別為 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6、a_7

且 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=2024$---①

$a_3=a_1+a_2$

$a_4=a_2+a_3=a_2+a_1+a_2=a_1+2a_2$

$a_5=a_3+a_4=a_1+a_2+a_1+2a_2=2a_1+3a_2$

$\therefore a_6=3a_1+5a_2$、$a_7=5a_1+8a_2$

由①得: $13a_1+20a_2=2024$

得解 $a_1=\frac{2024-20a_2}{13}=\frac{13\times155+9-13a_2-7a_2}{13}=155-a_2+\frac{9-7a_2}{13}$

取 $a_2=5\rightarrow a_1=155-5-2=148$

令 $a_1=148+20k$，$a_2=5-13k$ (k 為整數)

$148+20k\geq45$ 且 $142+20k<5-13k$ ➔ $-5\frac{3}{20}\leq k<-4\frac{5}{33}$

取 $k=-5$ ➔ $a_1=48$，$a_2=70$，$a_3=48+70=118$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分) ※未寫出計算過程不予計分

1. 設 $f(x)$為三次多項式，若 $f(x)$除以$(x-2)$、$(x-4)$、$(x+1)$餘式都是 3，且 $f(1)=-15$，求 $f(x)=$________。

<解析>

令 $f(x)=a(x-2)(x-4)(x+1)+3$

$f(1)=a\times(-1)\times(-3)\times(2)+3=-15\rightarrow a=-3$

$\therefore f(x)=-3(x-2)(x-4)(x+1)+3=-3x^3+15x^2-6x-21$

2. Assume $\boldsymbol{p}$ is a prime number. If both roots of the equation x^2-$\boldsymbol{p}x$-580$\boldsymbol{p}$=0 are integers, then $\boldsymbol{p}$ =________.

<解析>

$x^2-px-580p=0$

$\therefore x=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4\times1\times(-580p)}}{2}=\frac{p\pm\sqrt{p^2+2^4\times5\times29\times p}}{2}\in Z$

$D=p^2+2^4\times5\times29\times p$是完全平方數

①$p=2$➔ $D=2^2+2^4\times5\times29\times2=2^2\times(1+2^3\times5\times29)=2^2\times1161$ 不是完全平方數

②$p=5$➔ $D=5^2+2^4\times5\times29\times5=5^2\times(1+2^4\times29)=5^2\times465$ 不是完全平方數

③$p=29$➔ $D=29^2+2^4\times5\times29\times29=29^2\times(1+2^4\times5)=29^2\times9^2$ 是完全平方數

$\therefore x=\frac{29\pm29\times9}{2}\in Z$，則 $p=29$