第二十屆IMC國際數學競賽台灣區複賽
Twentieth International Mathematics Contest(Taiwan)

國中三年級試卷

考試時間:90 分鐘 卷面總分:100 分
《考試時間尚未開始請勿翻閱》

考生姓名：______________ 准考證號碼：______________ 試題總分：______________

◎參賽學生請將試題答案填寫在答案表內，填寫後不得塗改；塗改後的答案不計算成績!
◎計算題需要在試題空白處列出運算過程，只寫答案沒有運算過程不計算成績!

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	D	D	B	D	B	A
填充題	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	119°	553	$5x$-2	720°	25	7125	5	-4

一、選擇題(每題 5 分，共 40 分)

1. It is known that the integer part of $\sqrt{23}$-1 is $\boldsymbol{a}$ and the decimal part is $\boldsymbol{b}$, then the value of $4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ is ______. (A)$2\sqrt{23}$ (B) $3\sqrt{23}$ (C) $4\sqrt{23}$ (D) $5\sqrt{23}$

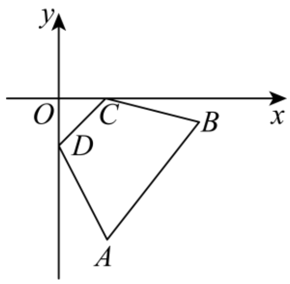
<解析>

整數部分 $a=\sqrt{23}-1=4-1=3$

小數部分 $b=\sqrt{23}-1-3=\sqrt{23}-4$

$\therefore 4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=4\times 3+(\sqrt{23}-4)\times 3==3\sqrt{23}$，選 B。

2. 如圖，在直角坐標系中，$A(2, -7)$、$B(6, -1)$、$C(c, 0)$、$D(0, d)$，則四邊形 ABCD 周長最小值為_______。(A)$4\sqrt{2}+2\sqrt{13}$ (B) $5\sqrt{2}+6\sqrt{13}$ (C)$7\sqrt{2}+3\sqrt{13}$ (D)$8\sqrt{2}+2\sqrt{13}$



<解析>

對 y 軸，求 A 的對稱點 A′(-2, -7)；對 x 軸，求 B 的對稱點 B′(6, 1)

$y=ax+b$

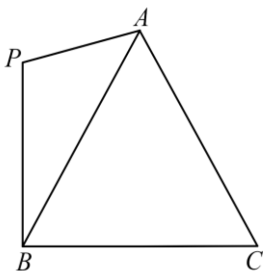
$-7=-2a+b$

$1=6a+b$

$8=8a$，$a=1$，$b=5$ ➔ $y=x-5$ (當 C、D 移動到 A′B′的直線方程上，即四點共線)

周長$=\overline{AB}+\overline{A'B'}=\sqrt{(6-2)^2+(-1+7)^2}+\sqrt{(-2-6)^2+(-7-1)^2}=\sqrt{16+36}+\sqrt{64+64}=2\sqrt{13}+8\sqrt{2}$，選 D。

3. 如圖，點 P 為等邊△ABC 外一點，且$\overline{PA}=6$，$\overline{PB}=9$，則$\overline{PC}$的最大值為__________。(A)12 (B)13 (C)14 (D)15



<解析>

將△PAB 繞 B 點順時針旋轉 60 度，到△$CP'B$，連接$\overline{PP'}$

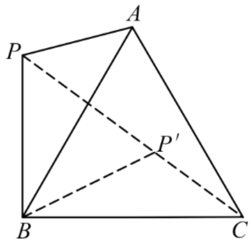
即$\overline{BP}=\overline{BP'}$ ➔ △$PBA\cong$△$P'BC(SAS)$

$\overline{P'C}=\overline{PA}=6$

$\angle PBP'=60^\circ$ ，∴△PBP'為等邊三角形

$\overline{PP'}=\overline{PB}=9$

$\therefore \overline{PP'}+\overline{P'C}=6+9=15$，當 P、P' 、C 共線時$\overline{PC}$最大，最大值=15，選 D。



4. 甲、乙、丙、丁、戊、己共有 6 人排成一列，甲不排在第三位且乙不排在第五位，有幾種排法? (A)516　(B)498　(C)510　(D)504

<解析>

全部情況-甲排第三位或乙排第五位的情況

=6!-(5!+5!-4!)=720-(120+120-24)=504，選 D。

5. 設a, b, c是互不相等的實數，且$a+\frac{3}{b}=b+\frac{3}{c}=c+\frac{3}{a}$，則 abc=__________。(A)$\pm2\sqrt{3}$ (B) $\pm3\sqrt{3}$ (C) $\pm4\sqrt{3}$ (D) $\pm5\sqrt{3}$

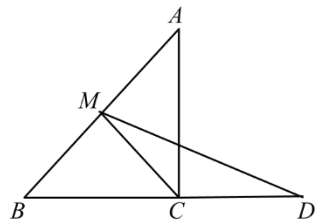
<解析>

$a+\frac{3}{b}=b+\frac{3}{c}$ ➔ $a-b=\frac{3}{c}-\frac{3}{b}=\frac{3b-3c}{bc}$ ，$bc=\frac{3(b-c)}{a-b}$

同理$ac=\frac{3(c-a)}{b-c}$，$ab=\frac{3(a-b)}{c-a}$

得到 $a^2b^2c^2=\frac{3(c-a)}{b-c}\times\frac{3(b-c)}{a-b}\times\frac{3(a-b)}{c-a}=27$，則 $abc=\pm3\sqrt{3}$選 B。

6. In the right triangle (直角三角形) on the right, $\angle ACB=90^\circ$, point M is the circumcenter(外心), extend $\overline{BC}$ to D, $\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$. If $\angle B=48^\circ$, then $\angle$D is______. (A)48° (B)36° (C)30° (D)24°



<解析>

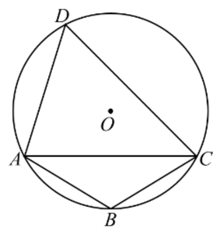
M 是$\triangle ABC$ 的外心，且$\angle ACB=90^\circ$

則$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=\overline{CD}$

$\angle BCM=\angle B=48^\circ$且$\angle CMD=\angle CDM$

$\therefore \angle BCM=48^\circ=2\angle CDM$，$\angle CDM=24^\circ$，選 D。

7. 如左圖，A、B、C、D 為圓 O 上四點，已知$\overline{AB}=\overline{BC}$，$\angle CAB=32^\circ$ ，則$\overset{\frown}{ABC}$ =________。(A)126° (B)128° (C)116° (D)118°



<解析>

$\because \overline{AB}=\overline{BC}$

$\therefore \angle CAB=\angle ACB=32^\circ$ $\rightarrow \angle CBA=180^\circ-32^\circ-32^\circ=116^\circ$

且四邊形 ABCD 為圓內接四邊形，$\angle CDA=180^\circ-116^\circ=64^\circ$

$\overset{\frown}{ABC}=2\angle CDA=128^\circ$ ，選 B。

8. 估計$(5+\sqrt{23})^3$的值，得知介於兩個連續整數 n 與 $n+1$ 之間，則 n=_________。
(A)939 (B)940 (C)941 (D)942

<解析>

$(5+\sqrt{23})^3=5^3+75\sqrt{23}+15\times23+23\sqrt{23}=470+98\sqrt{23}$

$(5-\sqrt{23})^3=5^3-75\sqrt{23}+15\times23-23\sqrt{23}=470-98\sqrt{23}$

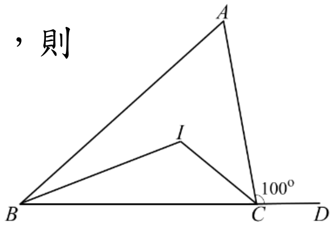
$\because 5-\sqrt{23}=\sqrt{25}-\sqrt{23}=\frac{2}{5+\sqrt{23}}$

$\therefore 0<5-\sqrt{23}<1$ ➔ $0<(5-\sqrt{23})^3<1$

$(5+\sqrt{23})^3+(5-\sqrt{23})^3=940$

$\therefore (5+\sqrt{23})^3=940-(5-\sqrt{23})^3$，$n=939$，選 A。

二、填充題(每題 5 分，共 40 分)



1. 如右圖，I 為$\triangle ABC$ 的內心，若$\angle ABC=42^\circ$ ，$\angle ACD=100^\circ$ ，則$\angle BIC=$________。

<解析>

$\angle ACB=180°-100°=80°$

則$\angle A=180°-80°-42°=58°$

$\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\times 58^\circ=119^\circ$

2. 化簡$\sqrt{23^2+23^2\times 24^2+24^2}=$________。

<解析>

令 $a=23$，原式$=\sqrt{a^2+a^2\times(a+1)^2+(a+1)^2}=\sqrt{[a(a+1)]^2+a^2+a^2+2a+1}$

$=\sqrt{[a(a+1)]^2+2a^2+2a+1}=\sqrt{[a(a+1)]^2+2a(a+1)+1^2}=\sqrt{[a(a+1)+1]^2}=a(a+1)+1$

$a=23$，所求$=23\times 24+1=553$

3. 設多項式$f(x)$除以(x^2-5x+4)，餘式為$(x+2)$；除以(x^2-5x+6)，餘式為$(3x+4)$。則多項式$f(x)$除以(x^2-4x+3)，餘式是________。

<解析>

$f(x)=(x^2-5x+4)Q_1(x)+(x+2)=(x-1)(x-4)Q_1(x)+(x+2)$-----①

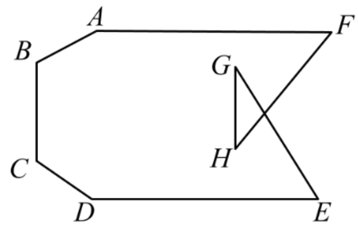
$(x^2-5x+6)Q_2(x)+(3x+4)=(x-2)(x-3)Q_2(x)+(3x+4)$-----②

$(x^2-4x+3)Q_3(x)+(ax+b)=(x-1)(x-3)Q_3(x)+(ax+b)$-----③

令 $x=1$ 代入①、③，則 $a+b=3$-----④

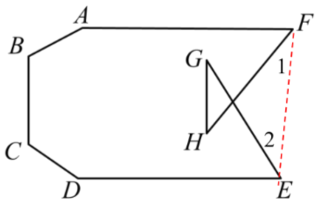
令 $x=3$ 代入③、②，則 $3a+b=13$-----⑤

由④⑤得 $a=5$，$b=-2$，故餘式$=5x-2$



4. 如右圖，求$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H=$________。

<解析>



連接$\overline{EF}\rightarrow\angle 1+\angle 2=\angle G+\angle H$

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H$

$=\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle 1+\angle 2$

=六邊形內角和$=(6-2)\times 180^\circ=720^\circ$

5. 乘積$1\times3\times5\times7\times\cdots\times2021\times2023\times2025$的末兩位數字是＿＿＿＿＿。

<解析>

令 $a=1\times3\times5\times\cdots.\times2021\times2023\times2025=25\times$某個奇數 x

奇數 $x\div4$ 餘 1 或 $3\Rightarrow x=4k+1$ 或 $4k+3$

①$x=4k+1\Rightarrow a=25\times(4k+1)=100k+25$

②$x=4k+3\Rightarrow a=25\times(4k+3)=100k+75$

$(1\times3\times5\times7)\div4$ 餘 1 [即$(1\times3\times1\times3)\div4$ 餘 1]

$(9\times11\times13\times15)\div4$ 餘 1 [即$(1\times3\times1\times3)\div4$ 餘 1]

$(17\times19\times21\times23)\div4$ 餘 1 [即$(1\times3\times1\times3)\div4$ 餘 1]

…….

$(2017\times2019\times2021\times2023)\div4$ 餘 1 [即$(1\times3\times1\times3)\div4$ 餘 1]

$2025\div4$ 餘 1

$\therefore a=1\times3\times5\times\cdots.\times2021\times2023\times2025\div4$ 餘 $1\times1\times1\times\cdots.\times1\times1=1$

$a=100k+25$，末兩位數是 25

6. 有一個自然數，將它的最左邊的數字刪除後得到一個新數，若原數為新數的 57 倍，求滿足這個條件的最小自然數為＿＿＿＿＿。

<解析>

原 $\boxed{x}\boxed{y}=x\times10^n+y$

新 $\boxed{y}=y$

$x\times10^n+y=57y$➔ $x\times10^n=56y$，$x\times(2\times5)^n=2^3\times7y$

原數最小➔$n=3$，$x\times(2\times5)^3=2^3\times7y$，$125x=7y$

$\therefore x=7$、$y=125$，則原數=7125

7. 學校組織學生進行足球比賽，記分辦法是：勝 1 場得 3 分，平 1 場得 1 分，負 1 場得 0 分。在這次比賽中，七年級（1）班代表隊比賽了 7 場得 16 分，且平的場數是負的場數的正整數倍，則七年級（1）班代表隊勝的場數為＿＿＿＿＿場。

<解析>

假設負場=x，平場=ax，勝場=$7-ax-x$

$3\times(7-ax-x)+1\times ax+0x=16$

$21-3ax-3x+ax=16$

$3x+2ax=5$

$x(3+2a)=5$，且 a 是正整數

則 $a=1$，$x=1$，則勝場=7-1-1=5

8. 設 p、q 是整數，方程$x^2+px+q=0$的一根是$\sqrt{4-2\sqrt{3}}$，則 $pq=$＿＿＿＿＿。

<解析>

$x=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(-\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$，故另一根為$-\sqrt{3}-1$

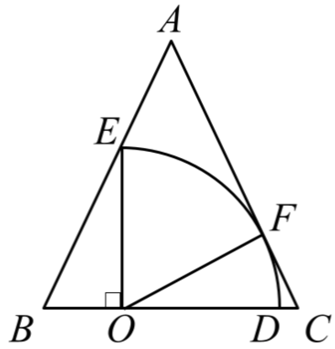
$x=-\sqrt{3}-1$，$x+1=-\sqrt{3}$，$(x+1)^2=3$，$x^2+2x+1=3$，$x^2+2x-2=0$

$p=2$，$q=-2$，則 $pq=2\times(-2)=-4$

三、計算題(每題 10 分，共 20 分) ※未寫出計算過程不予計分

1. 右圖的$\triangle ABC$中，扇形ODE的O、D兩點均在$\overline{BC}$上，E在$\overline{AB}$上，且$\overline{AC}$切$\overset{\frown}{ED}$於F點，若$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BC}=6$，$\angle EOB=90^\circ$，$\overline{OF}=3$，則$\overline{BO}$的長度為何?

<解析>



$\because \overline{AC}$切$\overset{\frown}{ED}$於F點，$\overline{OF}\perp\overline{AC}$

在$\triangle BOE$與$\triangle CFO$

① $\angle BOE=\angle CFO=90^\circ$

② $\overline{OE}=\overline{OF}$

③ $\angle B=\angle C$

$\therefore \triangle BOE\cong\triangle CFO$($AAS$全等)

$\overline{BE}=\overline{CO}$，設$\overline{BO}=x$

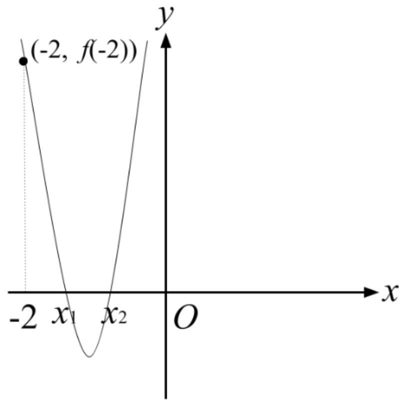
➔ $\overline{OC}=6-x=\overline{BE}$，在$\triangle BOE$中

$(6-x)^2=x^2+3^2$，$36-12x+x^2=x^2+9$

$12x=27$，$x=\frac{9}{4}$

2. It is known that a, b, c are all positive integers, and the parabola $y=ax^2+bx+c$ has two different intersection points A and B with the x-axis. If the distance from A, B to the origin is less than 2, find the value of $a+b+c$ minimum value.

<解析>



令 $y=f(x)=ax^2+bx+c$

設 $A(x_1, 0)$ $B(x_2, 0)$ $(x_1<x_2)$，則$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0 \\ x_1x_2=\frac{c}{a}>0 \end{cases}$ ➔ $x_1<0$，$x_2<0$

又$\triangle=b^2-4ac>0$ ➔ $b>2\sqrt{ac}$……..①

$\because \overline{OA}=|x_1|<2$，$\overline{OB}=|x_2|<2$，

故$-2<x_1<0$，$-2<x_2<0$ ➔ $\frac{c}{a}=x_1x_2<4$，$c<4a$……..②

因 $a>0$，開口向上，故 $x=-2$，$y=4a-2b+c>0$，得 $2b<4a+c$

而 $2b$, $4a+c$ 均為正整數，故 $4a+c\geq 2b+1$，由①得 $4a+c>4\sqrt{ac}+1$ ➔ $(2\sqrt{a}-\sqrt{c})^2>1$

由②得$2\sqrt{a}-\sqrt{c}>1$，即$2\sqrt{a}>\sqrt{c}+1\geq 2$，故 $a>1$，所以 $a\geq 2$

又 $b>2\sqrt{ac}\geq 2\sqrt{2\times 1}$，$b\geq 5$

取 $a=5$，$b=5$，$c=1$，$y=5x^2+5x+1$ 滿足題目條件，故 $a+b+c$ 的最小值為 11