

第二十屆 國際數學競賽台灣區初賽

Twentieth International Mathematics Contest (Taiwan)

國中三年級組

考生姓名		試題 總分	
准考證號碼			

◎參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。

◎計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

選擇題答案區

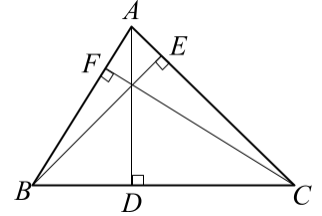
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

考試時間:60 分鐘 卷面總分:300 分

《考時時間尚未開始請勿翻閱》

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

1. As shown on the right, in the triangle ABC , $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=15$, $\overline{AC}=10$ and \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF} are the heights on the sides of \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} respectively, then $\overline{AD}:\overline{BE}:\overline{CF}=?$
 (A)15:10:6 (B)2:3:5 (C)5:3:2 (D)6:10:15

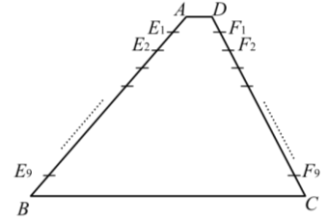


<解析>

面積固定，底邊與高成反比

$$\overline{AD}:\overline{BE}:\overline{CF}=\frac{1}{\overline{BC}}:\frac{1}{\overline{AC}}:\frac{1}{\overline{AB}}=\frac{1}{15}:\frac{1}{10}:\frac{1}{6}=2:3:5, \text{ 選 B.}$$

2. 如右圖，梯形 $ABCD$ ， $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$ ，將 \overline{AB} 十等分，得 E_1 、 E_2 、 E_3 、 E_4 、.....、 E_9 九個等分點；也將 \overline{CD} 十等分，得 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 、.....、 F_9 九個等分點。連接 $\overline{E_1F_1}$ 、 $\overline{E_2F_2}$ 、 $\overline{E_3F_3}$ 、.....、 $\overline{E_9F_9}$ ，若 $\overline{AD}=2$ ， $\overline{E_1F_1}=5$ ，則 $\overline{BC}=?$ 。(A)28 (B)30 (C)32 (D)34



<解析>

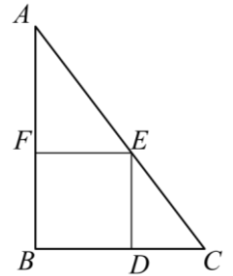
\overline{AD} 、 $\overline{E_1F_1}$ 、 $\overline{E_2F_2}$ 、.....、 $\overline{E_9F_9}$ 、 \overline{BC} 成等差數列

$$a_1=\overline{AD}=2$$

$$a_2=\overline{E_1F_1}=5 \rightarrow d=5-2=3$$

$$\overline{BC}=a_{11}=a_1+10d=2+(11-1)\times 3=32, \text{ 選 C.}$$

3. 如圖，直角 $\triangle ABC$ 中，四邊形 $BDEF$ 為正方形。已知 $\overline{AB}=8$ 公分， $\overline{BC}=6$ 公分，則 $\overline{EF}=?$ 公分。(A) $\frac{24}{7}$ (B) $\frac{24}{5}$ (C) $\frac{12}{7}$ (D) $\frac{12}{5}$



<解析>

$\triangle AFE\sim\triangle EDC$ (AA 相似)

$$\text{設 } \overline{EF}=\overline{BF}=x, \overline{AF}=8-x$$

$$\therefore \frac{8-x}{x}=\frac{x}{6-x} \rightarrow x^2=(8-x)(6-x), x^2=48-14x+x^2, x=\frac{24}{7}, \text{ 選 A.}$$

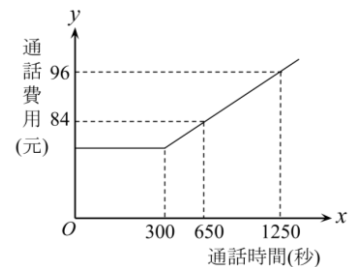
4. 觀察某種細菌的數量，發現每過 1 小時會比原來的數量增為 3 倍，若現在有此細菌 90000 隻，試問 2 小時前有幾隻細菌?(A)45000 (B)30000 (C)11250 (D)10000

<解析>

$$90000\div 3^2=10000$$

選 D。

5. 右圖是某電信公司的通話計算方式: 300 秒以內只繳基本費，超過 300 秒之後，與通話時間成線型函數關係，則基本費是 _____ 元。(A)73 (B)75 (C)77 (D)79



<解析>

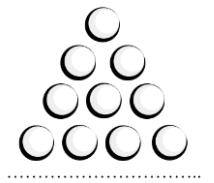
$$\text{超過 300 秒，每一秒需 } \frac{96-84}{1250-650}=\frac{12}{600}=0.02 \text{ 元}$$

$$\text{通話 650 秒} \rightarrow \text{超過 } 650-300=350$$

$$\text{超過基本費 } 0.02\times 350=7 \text{ 元}$$

$$\text{基本費}=84-7=77 \text{ 元，選 C.}$$

6. 阿華用 140 顆玻璃珠，由上而下排成三角形，如右圖，第一層排 1 顆，第二層排 2 顆，第三層排 3 顆，.....，第 n 層排 n 個，請問阿華最多可以排滿多少層？(A)14 (B)15 (C)16 (D)17



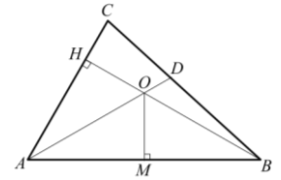
<解析>

$$1+2+3+\dots+n \leq 140$$

$$(1+n) \times n \div 2 \leq 140 \rightarrow (1+n) \times n \leq 280, n=16$$

最多排滿 16 層，選 C。

7. As shown in the figure on the right, in $\triangle ABC$, \overline{AD} is the angle bisector of $\angle A$, and the height \overline{BH} on \overline{AC} intersects the perpendicular bisector \overline{OM} on \overline{AB} at a point O on \overline{AD} . If $\angle ABC=53^\circ$, then $\angle C=$ _____.
- (A) 57° (B) 67° (C) 56° (D) 66°



<解析>

$$\text{令 } \angle CAD = \angle BAD = x^\circ$$

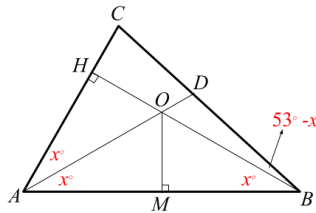
$$\therefore \angle OBM = x^\circ, \angle OBD = (53-x)^\circ$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ - (53-x)^\circ = 180^\circ - 2x^\circ - 53^\circ$$

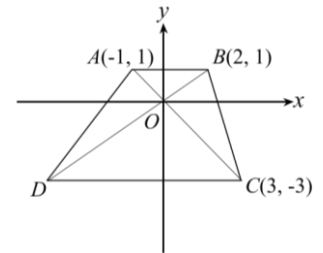
$$\therefore 90^\circ - 53^\circ + x^\circ = 127^\circ - 2x^\circ, 3x^\circ = 90^\circ, x = 30$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 60^\circ - 53^\circ = 67^\circ$$

選 B。



8. 直角坐標平面上有一梯形 $ABCD$ ，如右圖， \overline{AC} 、 \overline{BD} 相交於原點 O ，則 $\triangle AOD$ 面積 = _____。(A)9 (B)4.5 (C)6 (D)4



<解析>

$$\textcircled{1} \triangle AOB = 3 \times 1 \div 2 = \frac{3}{2}, \text{ 且 } \triangle AOB \sim \triangle COD (\text{AA 相似})$$

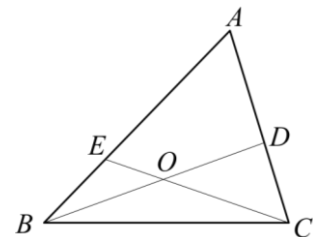
$$\triangle AOB : \triangle COD = 1^2 : 3^2 = 1 : 9$$

$$\triangle COD = \frac{3}{2} \times 9 = \frac{27}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ 令 } \triangle AOD = \triangle BOC = x$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \times \frac{27}{2}, x = \frac{9}{2}, \text{ 選 B。}$$

9. 如右圖，已知 $\triangle OBE$ 的面積是 5， $\triangle OBC$ 的面積是 10， $\triangle OCD$ 的面積是 8，問四邊形 $AEOD$ 的面積是多少？(A)20 (B)21 (C)22 (D)24



<解析>

連接 \overline{AO}

$$\triangle AOE : \triangle AOC = \overline{EO} : \overline{CO} = \triangle BOE : \triangle BOC$$

$$x : (y+8) = 5 : 10 \rightarrow 5y+40 = 10x, y = 2x-8$$

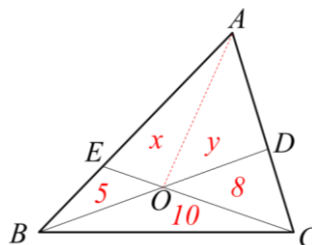
$$\triangle AOB : \triangle AOD = \overline{BO} : \overline{DO} = \triangle BOC : \triangle DOC$$

$$(x+5) : y = 10 : 8 \rightarrow 10y = 8x+40$$

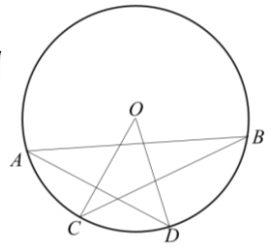
$$10(2x-8) = 8x+40, 12x = 120, x = 10$$

$$\therefore y = 2 \times 10 - 8 = 12$$

四邊形 $AEOD = x + y = 10 + 12 = 22$ ，選 C。



10. 圓 O 中， A 、 B 、 C 、 D 為圓上四點，已知 $\overline{AD} \perp \overline{OC}$ ， $\angle ABC = 23^\circ$ ，則 $\angle ADO$ 的度數為何？(A) 44° (B) 45° (C) 34° (D) 35°



<解析>

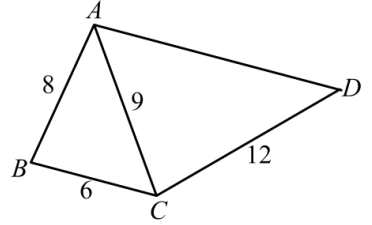
$$\because \overline{AD} \perp \overline{OC}$$

$$\therefore \text{arc } CD = \text{arc } AC = 2\angle ABC = 46^\circ$$

$$\rightarrow \angle COD = \text{arc } CD = 46^\circ$$

$$\therefore \angle ADO = 180^\circ - 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ, \text{ 選 A。}$$

11. 如右圖，若 $\angle ABC = \angle DCA$ ， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AC} = 9$ ， $\overline{CD} = 12$ ，則 $\overline{AD} = ?$ (A) $\frac{9}{2}$ (B) $\frac{13}{2}$ (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{27}{2}$



<解析>

$\triangle ABC$ 和 $\triangle DCA$

$$\textcircled{1} \angle ABC = \angle DCA$$

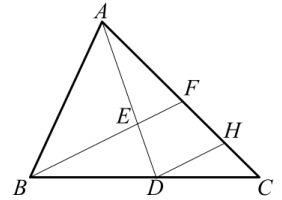
$$\textcircled{2} \overline{BC} : \overline{AC} = 6 : 9 = 2 : 3$$

$$\textcircled{3} \overline{AB} : \overline{CD} = 8 : 12 = 2 : 3$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DCA \text{ (SAS 相似)}$$

$$\overline{AC} : \overline{AD} = 2 : 3 \rightarrow 9 : \overline{AD} = 2 : 3, \overline{AD} = \frac{27}{2}, \text{ 選 D。}$$

12. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BD} : \overline{CD} = 4 : 3$ ， $\overline{AE} : \overline{DE} = 3 : 2$ ，且 $\overline{DH} \parallel \overline{BF}$ ， $\overline{AC} = 39$ ，則 $\overline{CH} = ?$ (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12



<解析>

$$\because \overline{DH} \parallel \overline{BF}$$

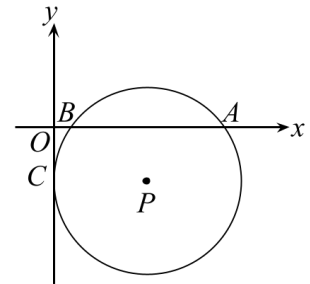
$$\therefore \overline{AF} : \overline{FH} = \overline{AE} : \overline{DE} = 3 : 2$$

$$\overline{FH} : \overline{CH} = \overline{BD} : \overline{CD} = 4 : 3$$

$$\text{故 } \overline{AF} : \overline{FH} : \overline{CH} = 6 : 4 : 3, \text{ 又 } \overline{AC} = 39$$

$$\therefore \overline{CH} = 39 \times \frac{3}{13} = 9, \text{ 選 B。}$$

13. 如右圖，坐標平面上，圓 P 切 y 軸於 C 點，交 x 軸於 $A(49, 0)$ 、 $B(1, 0)$ ，則圓心 P 點坐標為何？(A) $(25, -7)$ (B) $(25, -8)$ (C) $(20, -7)$ (D) $(20, -8)$



<解析>

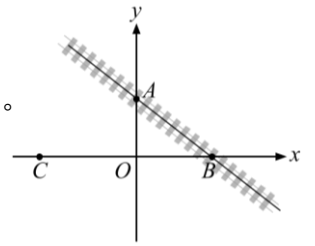
設 $P(a, b)$

$$a = \frac{1+49}{2} = 25, \overline{CP} = \overline{BP} = 25, \overline{AB} = 49 - 1 = 48$$

$$|b| = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7 \rightarrow b = -7$$

$$\therefore P(25, -7), \text{ 選 A。}$$

14. 右圖為直角坐標系， O 為原點，一條筆直的鐵路通過其北方 3 公里的 A 村，與東方 4 公里的 B 村，今從 O 點西方 5 公里的 C 村建築一條小路通過此鐵路，並在其上建設一平交道 D ，使 \overline{CD} 為最短距離，求 \overline{CD} 之距離為 _____ 公里。



- (A) $\frac{27}{5}$ (B) 5 (C) $\frac{27}{7}$ (D) 7

<解析>

$\triangle AOB$ 、 $\triangle CDB$

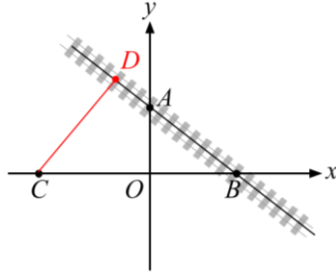
① $\angle B = \angle B$

② $\angle AOB = \angle BDC = 90^\circ$

$\triangle AOB \sim \triangle CDB$ (AA 相似)

$$\therefore \frac{AO}{CD} = \frac{AB}{BC} \rightarrow \frac{3}{CD} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{4+5} = \frac{5}{9}$$

$$\therefore \overline{CD} = \frac{27}{5}, \text{ 選 A.}$$



15. 如右圖， $L_1 // L_2$ ，若 $\angle 4 = 75^\circ$ ，則 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = ?$

- (A) 95° (B) 105° (C) 115° (D) 125°

<解析>

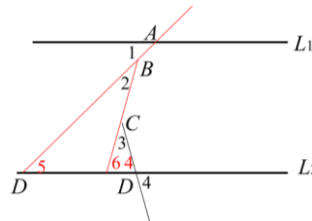
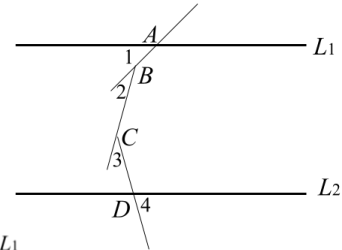
$\because L_1 // L_2 \rightarrow \angle 1 = \angle 5$

且 $\angle 2 + \angle 5 = \angle 6$

又 $\angle 3 + \angle 6 + \angle 4 = 180^\circ$

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ 且 $\angle 4 = 75^\circ$

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ ，選 B。



16. 有一個數列： $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{4}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、……，第 35 項為何？(A) 1 (B) $\frac{4}{6}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{3}{7}$

<解析>

分母=2，有 2 項

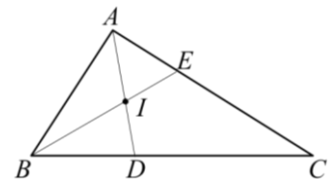
分母=3，有 3 項

$2+3+4+5+6+7+8=35$

\rightarrow 到第 35 項，分母 8 的排完

\therefore 第 35 項為 $\frac{8}{8} = 1$ ，選 A。

17. $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle A$ 、 $\angle B$ 的角平分線 \overline{AD} 、 \overline{BE} 交於 I ， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{AC} = 12$ ，求 $\overline{AI} : \overline{ID} = ?$ (A) 17:13 (B) 13:17 (C) 15:13 (D) 13:15



<解析>

$\overline{BC} = \sqrt{5^2+12^2} = 13$ ， \overline{AD} 為角平分線

$$\therefore \overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 5 : 12 \rightarrow \overline{BD} = 13 \times \frac{5}{17} = \frac{65}{17}$$

\overline{BE} 為角平分線

$$\therefore \overline{AI} : \overline{ID} = \overline{AB} : \overline{BD} = 5 : \frac{65}{17} = 17 : 13$$
，選 A。

18. 阿華跟幾位朋友相約一起去台東玩，總預算為 5600 元，在總預算不變的情況下，增加兩個人，每人可以少付 140 元，若原本有 a 人，每人分攤 b 元，則 $b-a=?$ (A)793 (B)692 (C)550 (D)660

<解析>

原本 a 人，後來 $(a+2)$ 人；原本分攤 b 元，後來 $(b-140)$ 元。

$$(a+2)(b-140)=ab=5600$$

$$\therefore ab+2b-140a-280=ab, 2b=140a+280, b=70a+140 \text{ 且 } ab=5600$$

$$a(70a+140)=5600, a^2+2a=80, a^2+2a-80=0, (a+10)(a-8)=0, a=8 \text{ 或 } a=-10(\text{取正})$$

$$b=70a+140=560+140=700$$

$$\text{故 } b-a=700-8=692, \text{ 選 B。}$$

19. 方程式 $3x^2-ax+8=0$ 無實數解，而方程式 $2x^2+5x+a=0$ ，有兩相異實數解，滿足上述條件的整數 a 總共有幾個? (A)10 (B)11 (C)12 (D)13

<解析>

①無實數解→判別式 <0

$$(-a)^2-4\times 8\times 3<0, a^2-96<0$$

$$\therefore -\sqrt{96}<a<\sqrt{96}$$

②兩相異實數解→判別式 >0

$$25-4\times a\times 2>0, 25>8a$$

$$\therefore a<\frac{25}{8}$$

$$\text{由①②得知, } -\sqrt{96}<a<\frac{25}{8}$$

整數 $a=-9、-8、-7、\dots、0、1、2、3$ ，共 13 個，選 D。

20. 若 $x\in\mathbb{R}$ 且 $y=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+5)^2}$ ，則 y 之最小值為_____。(A)2 (B)8 (C)3 (D)5

<解析>

$x\in\mathbb{R}$

$$y=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+5)^2}=|x-3|+|x+5|$$

$$\therefore y \text{ 之最小值 } = |3-(-5)|=8, \text{ 選 B。}$$

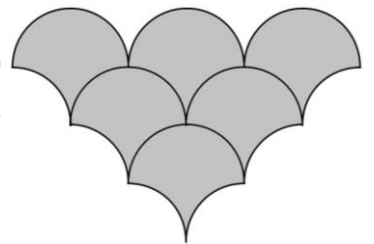
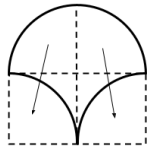
21. The figure on the right is composed of 6 semicircle arcs (半圓弧) and $6\frac{1}{4}$ arcs(弧). If the diameter is 3, what is the area of the gray part in square units?

- (A) 9π (B)27 (C)30 (D) 12π

<解析>

將圖形重新組合可補矩形

$$\text{面積} = 3 \times \frac{3}{2} \times 6 = 27, \text{ 選 B。}$$



22. 定義： n 階乘 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\dots\times 3\times 2\times 1$ ，例如： $4!=4\times 3\times 2\times 1$ ，若 $x!=6!\times 7!$ ，則 $x=?$ (A)13 (B)9 (C)10 (D)42

<解析>

$$x!=7!\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1=7!\times 8\times 9\times 10=10!, \text{ 則 } x=10$$

選 C。

23. 數列 2 、 2^2 、 2^{2^2} 、 $2^{2^{2^2}}$ 、..... 至少第幾項會大於 1000^{1000} ? ($2^3=2 \times 2 \times 2=8$)

(A)4 (B)5 (C)101 (D)1001

<解析>

① $1000^{1000}=(10^3)^{1000}$

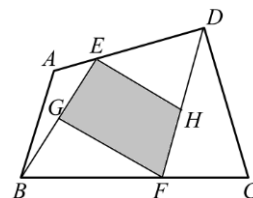
② $a_1=2$

$a_2=2^2=2 \times 2=4$

$a_3=2^{2^2}=2^4=16$

$a_4=2^{a_3}=2^{16}=2^{10} \times 2^6=1024 \times 64=65536$

$a_5=2^{a_4}=2^{65536}=(2^{10})^{6553} \times 2^6=1024^{6553} \times 2^6 > (10^3)^{6553} \times 64 > (10^3)^{1000}$ ，故第 5 項，選 B。



24. Refer to the diagram, the area of quadrilateral $ABCD$ is 120 square units, $\overline{ED}=2\overline{AE}$, $\overline{BF}=2\overline{FC}$. G and H are midpoints of \overline{BE} and \overline{DF} , respectively. What is the area of the shaded quadrilateral $EGFH$? (A)30

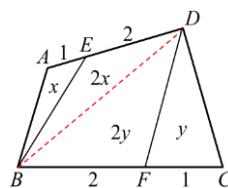
(B)35 (C)40 (D)60

<解析>

① 四邊形 $EBFD=2(x+y)$

四邊形 $ABCD=3(x+y)$

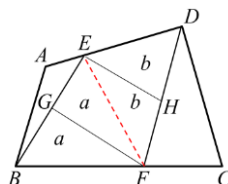
→ 四邊形 $EBFD=\frac{2}{3} \times$ 四邊形 $ABCD=\frac{2}{3} \times 120=80$



② 四邊形 $EGFH=a+b$

四邊形 $EBFD=2(a+b)$

→ 四邊形 $EGFH=\frac{1}{2} \times$ 四邊形 $EBFD=\frac{1}{2} \times 80=40$ ，選 C。



25. 如右表所示，把奇數按照一定規律排列，那麼在帶圓圈的數中，前 20 個數之和為 _____ (A)5710 (B)5720 (C)5730

(D)5740

<解析>

① $a_2=7=7+8 \times (1^2-1)=b_1$

$a_4=7+12 \times 2=7+24=7+8 \times 3=7+8 \times (2^2-1)=b_2$

$a_6=7+12 \times 2+20 \times 2=7+8 \times (3+5)=7+8 \times (3^2-1)=b_3$

$a_8=7+12 \times 2+20 \times 2+28 \times 2=7+8 \times (3+5+7)=7+8 \times (4^2-1)=b_4$

.....

$a_{20}=b_{10}=7+8 \times (10^2-1)$

→ $a_2+a_4+a_6+\dots+a_{20}=b_1+b_2+\dots+b_{10}=7 \times 10+8 \times (1^2+2^2+3^2+\dots+10^2)-8 \times 10$

→ $70+8 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6}-80=3080-10=3070$

② $a_3=19=c_1$

$a_5=19+12+20=19+32=19+16 \times 2=c_2$

$a_7=19+12+20+20+28=19+80=19+16 \times 5=19+16 \times (2+3)=c_3$

$a_9=19+12+20+20+28+28+36=19+16 \times (2+3+4)=c_4$

$a_{11}=19+16 \times (2+3+4+5)=c_5$

$a_{13}=19+16 \times (2+3+4+5+6)=c_6=19+16 \times \frac{(k-1)(2+k)}{2}$ (令 $k=6$)

$=19+8(k^2+k-2)=8k^2+8k+3=8 \times 6^2+8 \times 6+3$

.....

$a_{19}=c_9=8 \times 9^2+8 \times 9+3$

$a_3+a_5+a_7+\dots+a_{19}=c_1+c_2+c_3+\dots+c_9$

$=8(1^2+2^2+3^2+\dots+9^2)+8(1+2+3+\dots+9)+3 \times 9$

$=8 \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6}+8 \times 45+27=2280+360+27=2667$

③ $a_1+(a_2+a_4+a_6+\dots+a_{20})+(a_3+a_5+a_7+\dots+a_{19})=7+3070+2667=5740$ ，選 D。

49	51	53	55	57	59	61
47	17	19	21	23	25	63
45	15	1	3	5	27	65
43	13	11	9	7	29	67
41	39	37	35	33	61	69
	73	71

二、 計算題(25分/25分，共50分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. 老農夫有一塊四邊形的土地，他打算從A點畫一條直線把這塊土地平分。

(請寫出作圖方法及畫圖)

<解析>

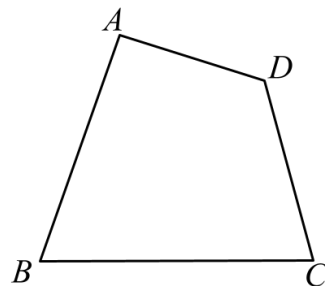
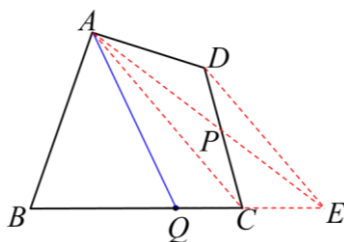
① 連接 \overline{AC}

② 作 $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ，交 \overline{BC} 於E點

則 $\triangle ADP = \triangle PCE$

$\rightarrow \triangle ABE =$ 四邊形 $ABCD$

③ 作 \overline{BE} 的中點Q，連接 \overline{AQ} ，即為所求



2. Try to solve the equation: $\sqrt{x+8} - \sqrt{5x+20} + 2 = 0$

<解析>

$$\sqrt{x+8} = \sqrt{5x+20} - 2 \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\text{兩邊同時平方} \rightarrow (\sqrt{x+8})^2 = (\sqrt{5x+20} - 2)^2$$

$$x+8 = 5x+20 - 4(\sqrt{5x+20}) + 4$$

$$4(\sqrt{5x+20}) = 4x+16$$

$$\sqrt{5x+20} = x+4$$

$$\text{兩邊同時平方} \rightarrow 5x+20 = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x+4)(x-1) = 0$$

$$x = -4 \text{ 或 } x = 1$$

$$\text{當 } x = -4 \text{ 代入 } \textcircled{1}, \sqrt{4} \neq \sqrt{5 \times (-4) + 20} - 2, 2 \neq -2$$

$$\text{當 } x = 1 \text{ 代入 } \textcircled{1}, \sqrt{1+8} = \sqrt{5+20} - 2, 3 = 3 \text{ (合理)}$$

$$\therefore x = 1$$