第二十屆 IMC 國際數學競賽台灣區初賽

Twentieth International Mathematics Contest (Taiwan)

<u>國中二年級組</u>

考生姓名		試題總分	
准考證號碼			

◎參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。
◎計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

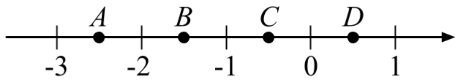
選擇題答案區

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

考試時間:60 分鐘　卷面總分:300 分

《考時時間尚未開始請勿翻閱》

一、 選擇題(每題 10 分，共 250 分)



1. There are four points A, B, C, and D on the number line in the right figure. Determine the position of each point in the right figure, which point represents the closest number to $(11-2\sqrt{39})$? (A)A (B)B (C)C (D)D

<解析>

$2\sqrt{39}=\sqrt{2^2\times39}=\sqrt{156}$

$12^2<156<13^2\rightarrow12<\sqrt{156}<13$

各減 11，$1<\sqrt{156}-11<2$

$\therefore -2<11-\sqrt{156}<-1$，選 B。

2. 若多項式 A 除以$(x+2)$得商式 Q，餘式為 7，則多項式 A 除以$(50x+100)$的餘式為何?

(A)Q (B)$\frac{Q}{50}$ (C) $\frac{7}{50}$ (D)7

<解析>

$A=(x+2)\times Q+7$

$=50(x+2)\times\frac{Q}{50}+7$

餘式=7，選 D。

3. 計算$133\frac{1}{385}\times3-\frac{392^2-49}{385}$之值為何? (A) $\frac{3}{385}$ (B) $\frac{6}{385}$ (C) $\frac{9}{385}$ (D) $\frac{12}{385}$

<解析>

原式$=(133+\frac{1}{385})\times3-\frac{392^2-7^2}{385}=399+\frac{3}{385}-\frac{399\times385}{385}=399+\frac{3}{385}-399=\frac{3}{385}$

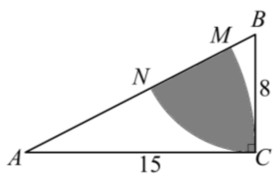
選 A。

4. 三個連續整數的倒數和為 $\frac{191}{504}$，則此三數之和為何? (A)18 (B)21 (C)24 (D)27

<解析>

$504=2^3\times3^2\times7=7\times8\times9$

$\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}=\frac{72+63+56}{504}=\frac{191}{504}$，則三數之和=7+8+9=24，選 C。



5. 如右圖，在直角三角形 ABC 中，兩股長為 8 和 15，分別以 A、B 為圓心，15 和 8 為半徑畫兩弧，交斜邊於 M、N 兩點，求$\overline{MN}$=?

(A)5.5 (B)6 (C)6.5 (D)7

<解析>

$\overline{AB}=\sqrt{8^2+15^2}=17$

$\overline{MN}=8+15-17=6$，選 B。

6. 設 $n\in N$，且 n 之正因數個數有 12 個，求滿足此條件之最小 n 值=_____。(A)60 (B)72 (C)80 (D)96

<解析>

60=1x60=2x30=3x20=4x15=5x12=6x10

選 A。

<另解>

12=1x12=2x6=3x4=3x2x2

n 的型式　a^{11}

$a^5 \times b^1$

$a^3 \times b^2$

$a^2 \times b^1 \times c^1$ (a、b、c 是質數)

$2^{11}=2048$

$2^5 \times 3=96$

$2^3 \times 3^2=72$

$2^2 \times 3 \times 5=60$(最小 n 值)

7. 比較 $a=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}$、$b=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}$、$c=\frac{1}{\sqrt{3}}\div\frac{1}{\sqrt{5}}$三數的大小關係為何? (A)$b>a>c$ (B)$c>b>a$ (C)$c>a>b$ (D)$a>b>c$

<解析>

$a=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$

$b=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$

$c=\frac{1}{\sqrt{3}}\div\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}}{1}=\frac{5}{\sqrt{15}}$

$\therefore 5>\sqrt{3}+\sqrt{5}>1$，c>a>b，選 C。

8. The weight of an object is inversely proportional (反比) to the square of its distance from the center of the planet. If a planet has a radius of 20,000 kilometers, and an object weighing 100 kilograms on the surface of the planet moves to a distance of 30,000 kilometers from the surface of the planet, how many kilograms does it weigh? (A)40 (B)32 (C)20 (D)16

<解析>

令物體的重量是 x 公斤，物體離星球的距離是 y 公里→$xy^2=k$

$100\times 20000^2=k$

$\therefore k=4\times 10^{10}$

移動後

$x\times(20000+30000)^2= 4\times 10^{10}$

$x\times 2.5\times 10^9= 4\times 10^{10}$

$x=16$，選 D。

9. 若 $a^2+2a=12$，求$(a-2)(a-3)(a+4)(a+5)$=? (A)-12 (B)-6 (C)12 (D)6

<解析>

$(a-2)(a-3)(a+4)(a+5)$

$=(a-2)(a+4)(a-3)(a+5)$

$=(a^2+2a-8)(a^2+2a-15)$

$=(12-8)(12-15)=-12$，選 A。

10. 設 $4^x=8^{y-1}$ 且 $9^y=27^{x-1}$，求 $x-y$=? (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

<解析>

$4^x=8^{y-1} \rightarrow 2^{2x}=2^{3(y-1)}$，$2x=3y-3$

$9^y=27^{x-1} \rightarrow 3^{2y}=3^{3(x-1)}$，$2y=3x-3$

兩式相減

$2x-2y=3y-3-3x+3$

$\therefore 5x=5y$，$x=y$，則 $x-y=0$，選 A。

11. 真好喝牌飲料每瓶 10 元，促銷期間，3 個瓶蓋可再換 1 瓶，詠潔拿 200 元，最多可以喝到多少瓶飲料? (A)27 (B)28 (C)29 (D)30

<解析>

購買或兌換	瓶	瓶蓋
200÷10=20	20	20
20÷3=6…2	6	6+2=8
8÷3=2…2	2	2+2
4÷3=1…1	1	1+1

最多 20+6+2+1=29 瓶，選 C。

12. 若 $2a^2+b^2+c^2-12a-8b-10c+59=0$，其中 a、b、c 為三角形的三邊，求此三角形的面積=? (A)12 (B)18 (C)6 (D)9

<解析>

$2a^2+b^2+c^2-12a-8b-10c+59=0$

$2(a^2-6a+9)+(b^2-8b+16)+(c^2-10c+25)=0$

$2(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$

$\therefore a=3$，$b=4$，$c=5 \rightarrow$此三角形為直角三角形

$\therefore$面積$=3\times4\div2=6$，選 C。

13. 若 ax^2+bx+6 除以$(x-1)$得到餘式為 8，除以$(x+1)$得到餘式為 12，則 $a\times b$=? (A)-10 (B)-9 (C)-8 (D)-6

<解析>

$ax^2+bx+6=(x-1)Q+8$

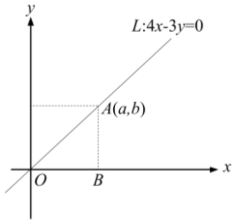
令 $x=1$，$a+b+6=8$，$a+b=2$

$ax^2+bx+6=(x+1)R+12$

令 $x=-1$，$a-b+6=12$，$a-b=6$

$\therefore 2a=8$，$a=4$，$b=-2 \rightarrow a\times b=-8$，選 C。

14. 如右圖，坐標平面上第一象限點 $A(a, b)$在直線 L: $4x-3y=0$ 上，線段 AB 垂直 x 軸於 B 點。若△AOB 面積為 54，則 $a+b$=? (A)20 (B)21 (C)22 (D)23



<解析>

$B(a, 0)$，$4a-3y=0$，$y=\frac{4}{3}a=b$

∴面積$=a\times b\times\frac{1}{2}=a\times\frac{4}{3}a\times\frac{1}{2}=54$，$a^2=81$，$a=9$ 或-9 (取 $a=9$)

當 $a=9$，$b=\frac{4}{3}\times 9=12$，則 $a+b=9+12=21$

則 $a+b=21$ 或-3

選 B

15. 用十分逼近法求最接近$\sqrt{2005+\sqrt{2005}}$的整數部分是多少? (A)44 (B)45 (C)46 (D)47

<解析>

$44^2=1936$，$45^2=2025$

$44^2<2005<45^2 \rightarrow 44<\sqrt{2005}<45$

$2005+44<2005+\sqrt{2005}<2005+45$

$\therefore 2049<2005+\sqrt{2005}<2050$

且 $45^2=2025$，$46^2=2116$

$\therefore\sqrt{2005+\sqrt{2005}}$≒$45.\sim$，整數部分為 45，選 B。

16. 有三堆棋子，每一堆棋子數一樣多，而且都只有黑白兩種顏色，已知第一堆的「黑子」和第二堆的「白子」一樣多，第三堆的黑子占全體黑子的 $\frac{2}{5}$，若想把這三堆棋子集中在一起，則白子占全部棋子的幾分之幾? (A) $\frac{4}{7}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{4}{11}$ (D) $\frac{4}{13}$

<解析>

	第 1 堆	第 2 堆	第 3 堆
每堆棋子數	x	x	x
黑	a	$x-a$	b
白	$x-a$	a	$x-b$

$\frac{b}{a+x-a+b}=\frac{2}{5}\rightarrow 2x+2b=5b$，$2x=3b$

白色$=\frac{x-a+a+x-b}{3x}=\frac{x+x-b}{3x}=\frac{3b-b}{4.5b}=\frac{4}{9}$，選 B。

17. 滿足$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<0.025$的最小正整數 n 為______。(A)200 (B)300 (C)400 (D)500

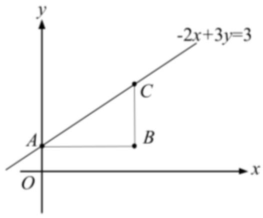
<解析>

①$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<0.025=\frac{1}{40}$

②$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>40 \rightarrow \sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}>40$，$2\sqrt{n+1}>40$

$\therefore\sqrt{n+1}>20$，$n+1>400$，$n>399$，最小正整數 $n=400$，選 C。

18. 如右圖，已知 A、C 兩點在一直線 $-2x+3y=3$ 上，且 A 點在 y 軸上，若連接 A、B 兩點的 $\overline{AB}$ 與 x 軸平行，連接 B、C 兩點的 $\overline{BC}$ 與 y 軸平行，且 A、B 兩點的距離為 5，則 $\overline{BC}$=? (A) $\frac{7}{3}$ (B) $\frac{8}{3}$ (C) 3 (D) $\frac{10}{3}$



<解析>

令 $x=0$，$A(0, 1)$

$\therefore B(5, 1)$

令 $x=5$，$-10+3y=3$，$y=\frac{13}{3}$，$C(5, \frac{13}{3})$

$\overline{BC}=\frac{13}{3}-1=\frac{10}{3}$，選 D。

19. 文化中心演唱會某日入場的成人與兒童共有 80 人，已知成人超過 50 人，而兒童人數超過成人人數的一半，則下列何者可能是成人的人數? (A)50 (B)52 (C)54 (D)56

<解析>

設成人的人數為 x 人

則 $x>50$，且孩童的人數 $(80-x)$ 人

$2(80-x)>x$，$160>3x$，$53\frac{1}{3}=\frac{160}{3}>x$

$\therefore 53\frac{1}{3}>x>50$，$x=51$、52、53，選 B。

20. 有一群學生分配帳篷，如果每頂睡 4 人，則有 11 人沒得睡；如果每頂睡 5 人，則有 1 頂帳篷有住人但沒睡滿。假設帳篷有 x 頂，則帳篷的個數不可能是下列哪一個? (A)13 (B)14 (C)15 (D)16

<解析>

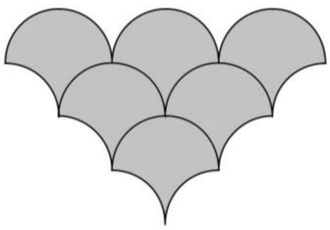
$5(x-1)<4x+11<5x$

①$5(x-1)<4x+11$，$x<16$

②$4x+11<5x$，$x>11$

$\therefore 11<x<16$，$x=12$、13、14、15，選 D。

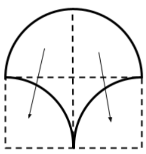
21. The figure on the right is composed of 6 semicircle arcs (半圓弧) and 6 $\frac{1}{4}$ arcs(弧). If the diameter is 3, what is the area of the gray part in square units? (A)9π (B)27 (C)30 (D)12π



<解析>

將圖形重新組合可補矩形

面積=$3\times\frac{3}{2}\times6=27$，選 B。



22. 定義: n 階乘 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\cdots\times3\times2\times1$，例如: $4!=4\times3\times2\times1$，若 $x!=6!\times7!$，則 x=? (A)13 (B)9 (C)10 (D)42

<解析>

$x!=7!\times6\times5\times4\times3\times2\times1=7!\times8\times9\times10=10!$，則 $x=10$

選 C。

23. 數列 2、2^2、2^{2^2}、$2^{2^{2^2}}$、……至少第幾項會大於 1000^{1000}? ($2^3=2\times2\times2=8$)
(A)4 (B)5 (C)101 (D)1001

<解析>

①$1000^{1000}=(10^3)^{1000}$

② $a_1=2$

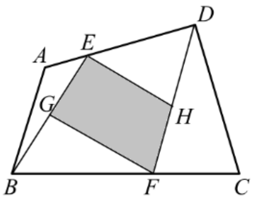
$a_2=2^2=2\times2=4$

$a_3=2^{2^2}=2^4=16$

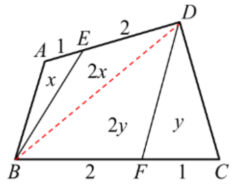
$a_4=2^{a_3}=2^{16}=2^{10}\times2^6=1024\times64=65536$

$a_5=2^{a_4}=2^{65536}=(2^{10})^{6553}\times2^6=1024^{6553}\times2^6>(10^3)^{6553}\times64>(10^3)^{1000}$，故第 5 項，選 B。

24. Refer to the diagram, the area of quadrilateral $ABCD$ is 120 square units, $\overline{ED}=2\overline{AE}$, $\overline{BF}=2\overline{FC}$. G and H are midpoints of $\overline{BE}$ and $\overline{DF}$, respectively. What is the area of the shaded quadrilateal $EGFH$? (A)30 (B)35 (C)40 (D)60



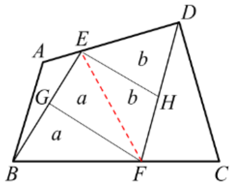
<解析>



①四邊形 $EBFD=2(x+y)$

四邊形 $ABCD=3(x+y)$

→四邊形 $EBFD=\frac{2}{3}\times$四邊形 $ABCD=\frac{2}{3}\times120=80$



②四邊形 $EGFH=a+b$

四邊形 $EBFD=2(a+b)$

→四邊形 $EGFH=\frac{1}{2}\times$四邊形 $EBFD=\frac{1}{2}\times80=40$，選 C。

25. 如右表所示，把奇數按照一定規律排列，那麼在帶圓圈的數中，前 20 個數之和為__________ (A)5710 (B)5720 (C)5730 (D)5740

49	51	53	55	57	59	61
47	17	19	21	23	25	63
45	15	1	3	5	27	65
43	13	11	9	7	29	67
41	39	37	35	33	31	69
	…	…	…	…	73	71

<解析>

①$a_2=7=7+8\times(1^2-1)=b_1$

$a_4=7+12\times2=7+24=7+8\times3=7+8\times(2^2-1)=b_2$

$a_6=7+12\times2+20\times2=7+8\times(3+5)=7+8\times(3^2-1)=b_3$

$a_8=7+12\times2+20\times2+28\times2=7+8\times(3+5+7)=7+8\times(4^2-1)=b_4$

....

$a_{20}=b_{10}=7+8\times(10^2-1)$

➔ $a_2+a_4+a_6+.....+a_{20}=b_1+b_2+......+b_{10}=7\times10+8\times(1^2+2^2+3^2+...+10^2)-8\times10$

➔$70+8\times\frac{10\times11\times21}{6}-80=3080-10=3070$

②$a_3=19=c_1$

$a_5=19+12+20=19+32=19+16\times2=c_2$

$a_7=19+12+20+20+28=19+80=19+16\times5=19+16\times(2+3)=c_3$

$a_9=19+12+20+20+28+28+36=19+16\times(2+3+4)=c_4$

$a_{11}=19+16\times(2+3+4+5)=c_5$

$a_{13}=19+16\times(2+3+4+5+6)=c_6=19+16\times\frac{(k-1)(2+k)}{2}$ (令 k=6)

$=19+8(k^2+k-2)=8k^2+8k+3=8\times6^2+8\times6+3$

....

$a_{19}=c_9=8\times9^2+8\times9+3$

$a_3+a_5+a_7+.....+a_{19}=c_1+c_2+c_3+......+c_9$

$=8(1^2+2^2+3^2+.....+9^2)+8(1+2+3+...+9)+3\times9$

$=8\times\frac{9\times10\times19}{6}+8\times45+27=2280+360+27=2667$

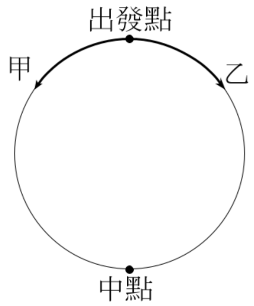
③ $a_1+(a_2+a_4+a_6+.....+a_{20})+(a_3+a_5+a_7+.....+a_{19})=7+3070+2667=5740$，選 D。

二、 計算題(25 分/25 分，共 50 分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. 如圖，甲、乙兩人同時同地依相反方向繞圓形跑道競走，甲每分鐘走 40 公尺，乙每分鐘走 30 公尺，當甲到達跑到中點時，乙離中點還有 150 公尺，試問:

   (1)圓形跑道一圈是多少公尺?

   (2)兩人由出發開始計時，至少經過多少分鐘兩人會相遇於出發點?



<解析>

(1)假設出發點到中點的距離為 x 公尺

$40:30=x:(x-150)$

$30x=40x-6000$

$10x=6000$

$x=600$ (公尺)

故圓形跑道一圈為 $2x=2\times600=1200$

(2)$1200\div40=30$，$1200\div30=40$

相遇的時間= $[30, 40]=120$ (分)

2. $x+y+z=2$，$x^2+y^2+z^2=2$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$，則 $x^3+y^3+z^3=?$

   參考公式: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$

<解析>

①$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)$

$2^2=2+2\times(xy+yz+xz)$

$xy+yz+xz=1$

②$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{xy+yz+xz}{xyz}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{xyz}=\frac{1}{3}$，$xyz=3$

③ $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$

$x^3+y^3+z^3-3\times3=2\times(2-1)$

$x^3+y^3+z^3=9+2=11$