

第二十屆 國際數學競賽台灣區初賽

Twentieth International Mathematics Contest (Taiwan)

國中一年級組

考生姓名		試題 總分	
准考證號碼			

◎參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。

◎計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

選擇題答案區

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

考試時間:60 分鐘 卷面總分:300 分

《考時時間尚未開始請勿翻閱》

一、 選擇題(每題 10 分，共 250 分)

1. 已知 $1 \text{ ppm} = \frac{1}{1000000}$ (即百萬分之一)，若一杯 300 公克的咖啡，其咖啡因的含量標示為 500 ppm 以下，則此咖啡的咖啡因總含量最多不超過幾公克? (A)1.5 (B)0.15 (C)0.015 (D)0.0015

<解析>

$$300 \times 500 \text{ ppm} = 150000 \times 10^{-6} = 0.15$$

選 B。

2. 若水庫的水位每天下降 3 公尺，三天前的水位與目前相比是高或低多少公尺? (A)高 9 公尺 (B)低 9 公尺 (C)高 6 公尺 (D)低 6 公尺

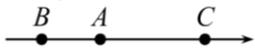
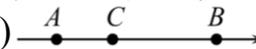
<解析>

$$3 \text{ 天前的水位差} = 3 \times 3 = 9$$

因每天下降，三天前比目前高

故高 9 公尺，選 A。

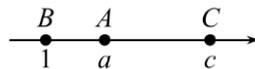
3. 數線上 A、B、C 三點所代表的數分別是 a、1、c，且 $|c-1|-|a-1|=|a-c|$ 。若下列選項中，有一個表示 A、B、C 三點在數線上的位置關係，則此選項為何?

(A)  (B)  (C)  (D) 

<解析>

$$|c-1|-|a-1|=|a-c| \rightarrow |c-1|=|a-c|+|a-1|$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$$



A 在 B、C 之間

選 A。

4. 連續三整數的倒數和為 $\frac{191}{504}$ ，則此三數之和為何? (A)18 (B)21 (C)24 (D)27

<解析>

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7 = 7 \times 8 \times 9$$

$$\therefore \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{191}{504}$$

$$\therefore 7+8+9=24, \text{ 選 C。}$$

5. 立德國小的男生和女生人數比是 4:3，已知男生人數是 624 人，全校共有多少人?
(A)1001 (B)1022 (C)1092 (D)1220

<解析>

$$4:3=624:\square$$

$$624 \div 4 = 156$$

$$156 \times 3 = 468$$

$$624 + 468 = 1092, \text{ 選 C。}$$

6. Suppose n is a positive integer. There are 12 positive factors of n . What is the smallest value of n that satisfies this condition? (A)60 (B)72 (C)80 (D)96

<解析>

$$60=1 \times 60=2 \times 30=3 \times 20=4 \times 15=5 \times 12=6 \times 10$$

選 A。

<另解>

$$12=1 \times 12=2 \times 6=3 \times 4=3 \times 2 \times 2$$

n 的型式 a^{11}

$a^5 \times b^1$

$a^3 \times b^2$

$a^2 \times b^1 \times c^1$ (a, b, c 是質數)

$$2^{11}=2048$$

$$2^5 \times 3=96$$

$$2^3 \times 3^2=72$$

$$2^2 \times 3 \times 5=60(\text{最小 } n \text{ 值})$$

7. 某商人以每台斤 300 元買進 260 台斤的烏魚子，其中有 10 台斤壞了不賣，剩下的選出較好的有 150 台斤，以每公斤 500 賣出，其餘以每公斤 300 元賣出，請問賣完後，他總共賺或賠多少元? (A)賺 10000 元 (B)賺 15000 元 (C)賠 10000 元 (D)賠 15000 元 (1 台斤=0.6 公斤)

<解析>

$$\text{成本}=300 \times 260=78000$$

$$\text{售價}=150 \times 0.6 \times 500+(260-150-10) \times 0.6 \times 300=45000+18000=63000$$

$$63000-78000=-15000$$

選 D。

8. The elder brother's money is $2\frac{2}{3}$ times that of the younger brother. If the two of them have a total of 253 dollars, how much money does the elder brother have than the younger brother? (A)110 (B)115 (C)120 (D)125

<解析>

$$253 \div (1 + 2\frac{2}{3}) = 253 \times \frac{3}{11} = 69$$

$$69 \times (2\frac{2}{3} - 1) = 115, \text{ 選 B。}$$

9. 桌面上有十張牌，每張牌的兩面各有一個數字，兩面的數字和為 10，且每張牌某一面的數字是 0 或 1 的其中 1 個。若桌上的十張牌一開始朝上的牌面數字和為 31，今將朝上的牌面數字 1 之牌翻面後，結果朝上的牌面數字和變為 47，則翻面的牌有多少張? (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

<解析>

數字組合(10, 0)或(9, 1)

若背面數字=1，翻面後的數字=9，每張牌增加 $9-1=8$

若背面數字=0，翻面後的數字=10，每張牌增加 $10-0=10$

\therefore 沒翻動 0 或 10，數字和不影響

$$47-31=16$$

$$16 \div 8=2, \text{ 被翻動的張數(原牌面數字=1)}$$

10. 弟弟今年的歲數多 1 歲，剛好是哥哥今年的歲數的一半；哥哥今年的歲數多 1 歲，剛好是弟弟今年的歲數的 3 倍，哥哥比弟弟多幾歲? (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

$$\text{哥哥} = \text{弟弟} + 1 + \text{弟弟} + 1$$

$$\text{哥哥} + 1 = \text{弟弟} + \text{弟弟} + \text{弟弟} \rightarrow \text{哥哥} = \text{弟弟} + \text{弟弟} + \text{弟弟} - 1$$

$$\text{弟弟} + 1 + \text{弟弟} + 1 = \text{弟弟} + \text{弟弟} + \text{弟弟} - 1$$

弟弟=3，哥哥=3+1+3+1=8，相差 8-3=5，選 C。

11. 如果有一群小朋友排成一行，每人依次報數: 1、2、3、4、5、6、1、2、3、4、5、6、1、.....，假如最後一個所報的數字是 3，那麼這群小朋友的人數符合哪種情況? (A)一定是偶數 (B)一定是 6 的倍數 (C)一定是 4 的倍數 (D)一定是 3 的倍數

<解析>

設小朋友有 x 人

$$\frac{(x-3)}{6} = k \rightarrow x = 6k + 3 = 3(2k + 1)$$

小朋友人數必為 3 的倍數，選 D。

12. 真好喝牌飲料每瓶 10 元，促銷期間，3 個瓶蓋可再換 1 瓶，詠潔拿 200 元，最多可以喝到多少瓶飲料? (A)27 (B)28 (C)29 (D)30

<解析>

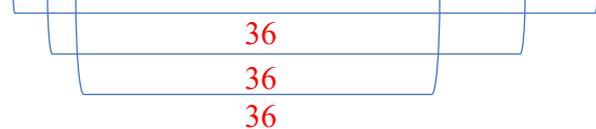
購買或兌換	瓶	瓶蓋
$200 \div 10 = 20$	20	20
$20 \div 3 = 6 \dots 2$	6	$6 + 2 = 8$
$8 \div 3 = 2 \dots 2$	2	$2 + 2$
$4 \div 3 = 1 \dots 1$	1	$1 + 1$

最多 $20 + 6 + 2 + 1 = 29$ 瓶，選 C。

13. What is the sum of all the numbers of natural numbers 1, 2, 3, ..., 9998, 9999? (ex. The sum of 37 numbers is $3 + 7 = 10$) (A)18000 (B)180000 (C)36000 (D)360000

<解析>

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, , 9996, 9997, 9998, 9999 數字和



數字和 $= \frac{36 \times 10000}{2} = 180000$ ，選 B。

14. 如右圖，有多少個正方形? (A)25 (B)26 (C)27 (D)28

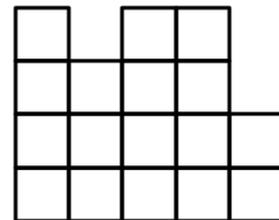
<解析>

$$\text{正方形}(1) = 17$$

$$\text{正方形}(4) = 8$$

$$\text{正方形}(9) = 2$$

共有 $17 + 8 + 2 = 27$ 個，選 C。



15. 下列每題的數字都有一定的關係，將適當的數字填入漏空的空格內：

4	6	?	9	1	8
13	17	15	23	7	21

(A)3 (B)5 (C)9 (D)6

<解析>

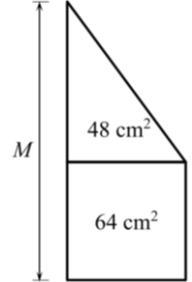
$$4 \times 2 + 5 = 13$$

$$6 \times 2 + 5 = 17$$

$$9 \times 2 + 5 = 23$$

$$\square \times 2 + 5 = 15, \square = 5, \text{選 B。}$$

16. 右圖是由一個正方形和一個直角三角形組合而成，求 M 的長度是多少公分? (A)12 (B)16 (C)18 (D)20



<解析>

$$\text{正方形面積} = \square \times \square = 64$$

$$\text{故邊長} \square = 8$$

$$\text{三角形的高} = \frac{48 \times 2}{8} = 12$$

$$\text{故 } M = 12 + 8 = 20, \text{選 D。}$$

17. 在等差數列 100、200、300、400、500、600 插入一些正整數後，仍然是等差數列，那麼加入後，不可能是幾項? (A)11 (B)26 (C)31 (D)51

<解析>

$$\text{差} = 200 - 100 = 100, \text{故差數規律} = \frac{100}{n}$$

$$\text{故 } n = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$$

$$\text{則 } n = 1, \text{差} = 100, \text{數列} = 100, 200, 300, 400, 500, 600 \text{ (6 項)}$$

$$\text{則 } n = 2, \text{差} = 50, \text{數列} = 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600 \text{ (6+5 \times 1 = 11 項)}$$

$$\text{則 } n = 4, \text{差} = 25, \text{數列} = 100, 125, 150, 175, 200, 225, 250, 275, 300, 325, 350, 375, 400, 425, 450, 475, 500, 525, 550, 575, 600 \text{ (6+5 \times 3 = 21 項)}$$

依此類推

$$\text{則 } n = 5, \text{差} = 20, \text{數列} = 100, 120, \dots, (6+5 \times 4 = 26 \text{ 項})$$

$$\text{則 } n = 10, \text{差} = 10, \text{數列} = 100, 110, \dots, (6+5 \times 9 = 51 \text{ 項})$$

$$\text{則 } n = 20, \text{差} = 5, \text{數列} = 100, 105, \dots, (6+5 \times 19 = 101 \text{ 項})$$

$$\text{則 } n = 25, \text{差} = 4, \text{數列} = 100, 105, \dots, (6+5 \times 24 = 126 \text{ 項})$$

$$\text{則 } n = 50, \text{差} = 2, \text{數列} = 100, 102, \dots, (6+5 \times 49 = 251 \text{ 項})$$

$$\text{則 } n = 100, \text{差} = 1, \text{數列} = 100, 101, \dots, (6+5 \times 99 = 501 \text{ 項})$$

不可能是 31 項，選 C。

18. 有六個連續奇數，前三數的和與後三數的和相差多少? (A)21 (B)18 (C)15 (D)12

<解析>

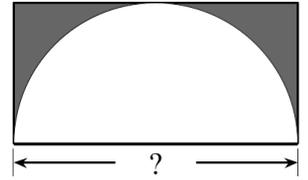
$$\text{連續奇數 } a, a+2, a+4, a+6, a+8, a+10$$

$$\text{前三數} = a + a + 2 + a + 4 = 3a + 6$$

$$\text{後三數} = a + 6 + a + 8 + a + 10 = 3a + 24$$

$$3a + 24 - (3a + 6) = 18, \text{選 B。}$$

19. 如右圖，塗色的周長是 114.24 公分，求長方形的長邊是多少公分？(A)28 (B)30 (C)32 (D)34



<解析>

假設長方形的短邊是 \square 公分，短邊長度=圓的半徑

$$\square \times 4 + \square \times 2 \times 3.14 \div 2 = 114.24$$

$$\square \times (4 + 3.14) = 114.24$$

$$\square = 114.24 \div 7.14 = 16$$

長邊 = $16 \times 2 = 32$ ，選 C。

20. 右圖 5 條線段的三個數字相加之和都相等，最多有幾個數字會重複出現？(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

<解析>

設 9 的下面的數字 = y

$$\text{則三個數字之和} = 8 + y + 10 = 18 + y$$

各格依序 $y-1$ 、12、11、 $y+1$

數字要求重複出現

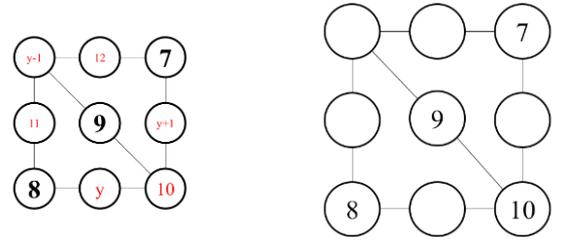
當 $y=8$ ，(7, 12, 7, 11, 9, 9, 8, 8, 10)，有 3 個數字重複。

當 $y=9$ ，(8, 12, 7, 11, 9, 10, 8, 9, 10)，有 3 個數字重複。

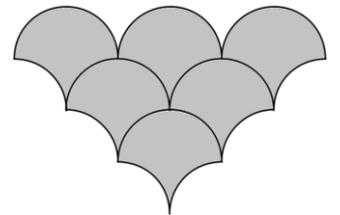
當 $y=10$ ，(9, 12, 7, 11, 9, 11, 8, 10, 10)，有 3 個數字重複。

當 $y=11$ ，(10, 12, 7, 11, 9, 12, 8, 11, 10)，有 3 個數字重複。

選 D。



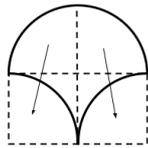
21. The figure on the right is composed of 6 semicircle arcs (半圓弧) and $6 \frac{1}{4}$ arcs(弧). If the diameter is 3, what is the area of the gray part in square units? (A) 9π (B)27 (C)30 (D) 12π



<解析>

將圖形重新組合可補矩形

$$\text{面積} = 3 \times \frac{3}{2} \times 6 = 27, \text{選 B。}$$



22. 定義： n 階乘 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ ，例如： $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ，若 $x! = 6! \times 7!$ ，則 $x = ?$ (A)13 (B)9 (C)10 (D)42

<解析>

$$x! = 7! \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! \times 8 \times 9 \times 10 = 10!, \text{則 } x = 10$$

選 C。

23. 數列 $2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \dots$ 至少第幾項會大於 1000^{1000} ? ($2^3=2 \times 2 \times 2=8$)

(A)4 (B)5 (C)101 (D)1001

<解析>

① $1000^{1000}=(10^3)^{1000}$

② $a_1=2$

$a_2=2^2=2 \times 2=4$

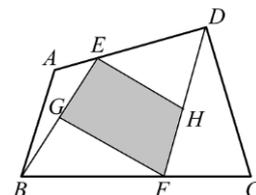
$a_3=2^{2^2}=2^4=16$

$a_4=2^{a_3}=2^{16}=2^{10} \times 2^6=1024 \times 64=65536$

$a_5=2^{a_4}=2^{65536}=(2^{10})^{6553} \times 2^6=1024^{6553} \times 2^6 > (10^3)^{6553} \times 64 > (10^3)^{1000}$

故第 5 項，選 B。

24. Refer to the diagram, the area of quadrilateral $ABCD$ is 120 square units, $\overline{ED}=2\overline{AE}$, $\overline{BF}=2\overline{FC}$. G and H are midpoints of \overline{BE} and \overline{DF} , respectively. What is the area of the shaded quadrilateral $EGFH$? (A)30 (B)35 (C)40 (D)60



<解析>

① 四邊形 $EBFD=2(x+y)$

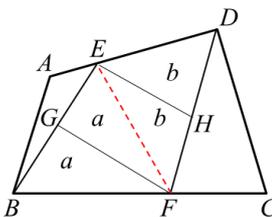
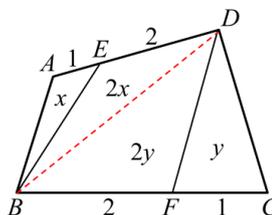
四邊形 $ABCD=3(x+y)$

→ 四邊形 $EBFD=\frac{2}{3} \times$ 四邊形 $ABCD=\frac{2}{3} \times 120=80$

② 四邊形 $EGFH=a+b$

四邊形 $EBFD=2(a+b)$

→ 四邊形 $EGFH=\frac{1}{2} \times$ 四邊形 $EBFD=\frac{1}{2} \times 80=40$



25. 如右表所示，把奇數按照一定規律排列，那麼在帶圓圈的數中，從小到大第 20 個數為何? (A)599 (B)699 (C)799 (D)899

<解析>

3、7、19、31、51、71、99、127、163、199

$a_2=7$

$a_4=7+12 \times 2$

$a_6=7+12 \times 2+20 \times 2$

$a_8=7+12 \times 2+20 \times 2+28 \times 2=7+2 \times (12+20+28)$

$a_{10}=7+12 \times 2+20 \times 2+28 \times 2+36 \times 2=7+2 \times (12+20+28+36)$

.....

$a_{20}=7+2 \times (12+20+28+\dots+b_9)=7+2 \times \frac{9 \times [2 \times 12+8 \times 8]}{2}=7+9 \times (24+64)=7+792=799$

選 C。

49	51	53	55	57	59	61
47	17	19	21	23	25	63
45	15	1	3	5	27	65
43	13	11	9	7	29	67
41	39	37	35	33	31	69
	73	71

二、 計算題(25分/25分，共50分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. 甲、乙二人在圓形跑道上，從一點A分別以每秒7公尺、8公尺的速度同時依相同方向出發，直到兩人同時回到A點才停止，則兩人在中途相遇多少次?(出發那一次不算)

<解析>

令跑道一周是56公尺→甲=56÷7=8秒，乙=56÷8=7秒

$[8, 7]=56$ 秒，每56秒兩人同時回到A點並停止

甲:56÷8=7圈，乙:56÷7=8圈，直到最後一次相遇於A點

中途相遇0次

2. 有一個長方體的容器，內部的長、寬、高分別是30公分、25公分、20公分。先倒入一些水後，量得的水深是17公分，接著丟入一個邊長為16公分的正方體鐵塊，水是否會溢出來? 若會溢出來，溢出的水有多少毫升?

<解析>

$$30 \times 25 \times (20 - 17) = 750 \times 3 = 2250$$

$$16 \times 16 \times 16 = 4096$$

$4096 > 2250$ → 水會溢出來

$$\text{溢出的體積} = 4096 - 2250 = 1846 \text{ (毫升)}$$