第二十屆 IMC 國際數學競賽台灣區初賽

Twentieth International Mathematics Contest (Taiwan)

高中二年級組

考生姓名		試題總分	
准考證號碼			

◎參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。

◎計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

選擇題答案區

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

考試時間:60 分鐘 卷面總分:300 分

《考時時間尚未開始請勿翻閱》

一、 選擇題(每題 10 分，共 250 分)

1. 設 6^x-4·3^x-3·2^x+12=0 之兩根為 α、β，則 $\alpha^2+\beta^2$=______。(A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

原式: $2^x \cdot 3^x - 4\cdot 3^x - 3\cdot 2^x + 12 = 0$

$\rightarrow 3^x\cdot(2^x-4)-3(2^x-4)=0$

$\rightarrow (2^x-4)(3^x-3)=0$

$\therefore 2^x$-4 或 3^x-3$\rightarrow x=2$ 或 $x=1$

$\therefore \alpha=2$，$\beta=1\rightarrow \alpha^2+\beta^2=5$，選 C。

2. If $k=9^7-10\times9^6+12\times9^5-25\times9^4-21\times9^3+31\times9^2-35\times9+1200$, then the remainder when k is divided by 11 is ______. (A)10 (B)-10 (C)12 (D)-12

<解析>

令 $x=9$，則 $k=f(x)=x^7-10x^6+12x^5-25x^4-21x^3+31x^2-35x+1200$

$\rightarrow f(x)$除以$(x+2)$，餘數為 $f(-2)$

1	-10	+12	-25	-21	+31	-35	+1200	-2
	-2	+24	-72	+194	-346	+630	-1190	
1	-12	+36	-97	+173	-315	+595	+10	

$f(-2)=10$，選 A。

3. 設 a、b、c 為實數，若二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過(0, -1)且與 x 軸相切，下列正確的是哪幾個? ① $a<0$ ② $b>0$ ③c=-1 ④$b^2+4ac=0$ ⑤$a+b+c\leq0$

(A) ①、③、⑤ (B) ①、②、⑤ (C) ②、③、④ (D) ①、②、④

<解析>

令 $f(0)=-1\rightarrow c=-1$，$b^2-4ac=0\rightarrow b^2+4a=0$

過(0, -1)$\rightarrow a<0$，b 皆有可能

$f(1)\leq0\rightarrow a+b+c\leq0$

故①、③、⑤正確，選 A。

4. 觀察某種細菌的數量，發現每過 1 小時會比原來的數量增為 3 倍，若現在有此細菌 90000 隻，試問 2 小時前有幾隻細菌? (A)45000 (B)30000 (C)11250 (D)10000

<解析>

$90000\div3^2=10000$

選 D。

5. x、y 滿足 L: $3x+4y=1$，則$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$之最小值為_____。(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

<解析>

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\rightarrow$P($x$, y)到(1, 2)之距離

且 P 在 L: $3x+4y=1$，故最小距離為$\frac{|3\times1+4\times2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$，選 B。

6. 設直線 L: $kx+3y+10=0$，與圓 C: $x^2+y^2=4$ 無交點，則符合 k 的正整數有幾個?
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

<解析>

$\frac{10}{\sqrt{k^2+9}}>2$(圓的半徑)$\rightarrow k^2<16\rightarrow -4<k<4$，$k=1$、2、3

選 C。

7. 設 n 是正整數，則使得 1.25^n 整數部分為 10 位數，則最大的 n 值是多少?
(A)100 (B)101 (C)102 (D)103 ($\log 1.25\fallingdotseq 0.0969$)

<解析>

$10^9\leq 1.25^n<10^{10}$，且 $10^{0.0969}=1.25$

$\rightarrow 10^9\leq(10^{0.0969})^n<10^{10}$，$9\leq 0.0969n<10$

$\rightarrow 92.8\leq n<103.1$，$n=103$，選 D。

8. 校慶園遊會，郁芬到一處只賣紅茶及奶茶的攤位，紅茶一杯 10 元，奶茶一杯 20 元，郁芬想用僅有的預算 60 元，至少買兩杯飲料，在飲料供應充足的情況下，則所有可能的買法有幾種? (A)13 (B)12 (C)11 (D)10

<解析>

設紅茶買 x 杯，奶茶買 y 杯

①$10x+20y\leq 60$➔$x+2y\leq 6$

②$x+y\geq 2$

$x\geq 0$，$y\geq 0$，x、$y\in Z$

當 $y=0$，$x=2\sim 6$，有 5 種

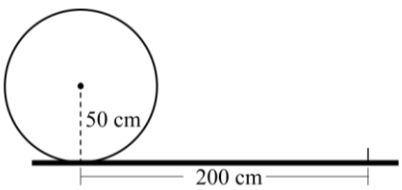
當 $y=1$，$x=1\sim 4$，有 4 種

當 $y=2$，$x=0\sim 2$，有 3 種

當 $y=3$，$x=0$ ，有 1 種

共有 13 種，選 A。

9. 有一個輪子，半徑 50 公分，讓它在地上滾動 200 公分長度，問輪子繞軸轉動幾度? (A)229 (B)219 (C)209 (D)199 (度以下四捨五入)



<解析>

$S=r\theta \rightarrow 200=50\theta$

$\therefore \theta=4$ (弳)$=4\times\frac{180°}{\pi}=\frac{720°}{\pi}\fallingdotseq 229$

選 A。

10. 設 x 為任意實數，求 $\cos x\cdot\sin(x+\frac{\pi}{6})$的最大值為____。 (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

<解析>

$\cos x\,(\sin x\cos 30°+\cos x\sin 30°)$

$=\mathrm{cox}\,(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\,\mathrm{cox}+\frac{1}{2}\cos^2 x$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}\times\frac{\cos 2x+1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\times\cos 2x+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6})+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{4}$

故最大值 $\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，選 D。

11. 袋中有 5 顆紅球與 3 顆白球，樂樂從袋中每次取一球，直到取完為止，則白球先取完的機率為何? (A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{2}{8}$

<解析>

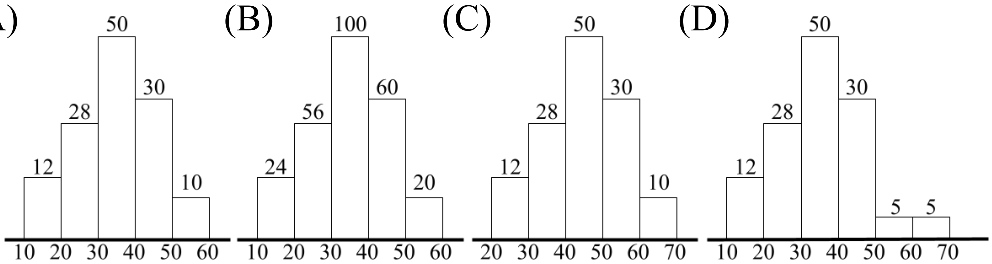
白球先取完=第 8 次取到紅球且前 7 次為 4 顆紅球與 3 顆白球作直線排列

$|S|=\frac{8!}{5!3!}=56$，$|A|=\frac{7!}{4!3!}=35$

$\therefore$白球先取完的機率$=\frac{|A|}{|S|}=\frac{35}{56}=\frac{5}{8}$，選 B。

12. 下列五個直方圖表示的資料，何者之標準差最大?

(A) (B) (C) (D)



<解析>

資料越集中，標準差越小；資料越分散，標準差越大

全距依序: 50、50、50、60

第 4 個資料分散，故標準差最大，選 D。

13. A total of 9 numbers from 1 to 9, any three different numbers are taken as a group, how many numbers are there in which the sum is odd? (A)30 (B)40 (C)50 (D)60

<解析>

1~9 奇數有 5 個，偶數有 4 個

三數之和為奇數的情況:

①三數皆為奇數: $C_3^5=10$ 種，②一個奇數和兩個偶數: $C_1^5\times C_2^4=30$ 種

共有 10+30=40 種

故選 B。

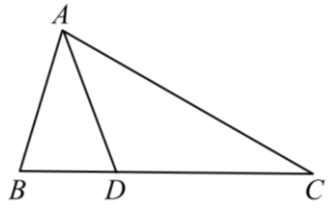
14. 試求級數$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\ldots+\frac{1}{10\times11\times12}=$______。(A) $\frac{35}{264}$ (B) $\frac{45}{264}$ (C) $\frac{55}{264}$ (D) $\frac{65}{264}$

<解析>

原式$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4})+\ldots\ldots+\frac{1}{2}(\frac{1}{10\times11}-\frac{1}{11\times12})=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{132})=\frac{1}{2}\times\frac{65}{132}=\frac{65}{264}$

選 D。

15. 如右圖所示，在△ABC 中，$\angle BAC$ 的角平分線$\overline{AD}$交對邊$\overline{BC}$於 D，已知$\overline{BD}=3$，$\overline{CD}=6$，且$\overline{AD}=\overline{AB}$，則 $\cos\angle BAD$ 之值為______。(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{3}{8}$



<解析>

$\because \overline{AD}$為$\angle BAC$之角平分線

$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，令$\overline{AB}=\overline{AD}=k$，$\overline{AC}=2k$

①$\triangle ABD$ 中，$\cos\angle BAD=\frac{k^2+k^2-9}{2k\cdot k}$

②$\triangle ACD$ 中，$\cos\angle CAD=\frac{k^2+4k^2-36}{2k\cdot 2k}$

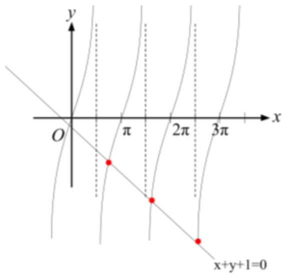
$\therefore \frac{k^2+4k^2-36}{2k\cdot 2k}=\frac{k^2+k^2-9}{2k\cdot k} \rightarrow k^2=18$

$\cos\angle BAD=\frac{36-9}{36}=\frac{3}{4}$，選 A。

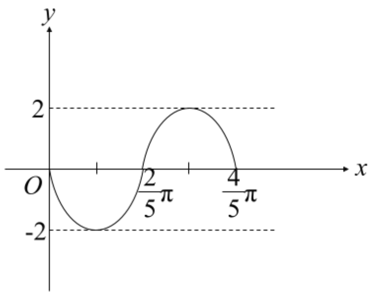
16. 當 $0\leq x\leq 3\pi$時，直線 $x+y+1=0$ 與函數 $y=\tan x$ 的圖形共有幾個交點？(A)2 (B)3 (C)4 (D)5

<解析>

由圖可知，共有 3 個交點，選 B。



17. 右圖為 $y=\alpha\sin kx$ 圖形的一部分，$k>0$，則序組$(\alpha, k)=$______。(A)$(-2, \frac{5}{2})$ (B)$(-1, \frac{5}{2})$ (C)$(-2, \frac{5}{3})$ (D) $(-1, \frac{5}{3})$



<解析>

kx	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{2k}$	$\frac{\pi}{k}$	$\frac{3\pi}{2k}$	$\frac{2\pi}{k}$
y	0	α	0	$-\alpha$	0

$\therefore \alpha=-2$，$\frac{2\pi}{k}=\frac{4\pi}{5} \rightarrow k=\frac{5}{2}$，選 A。

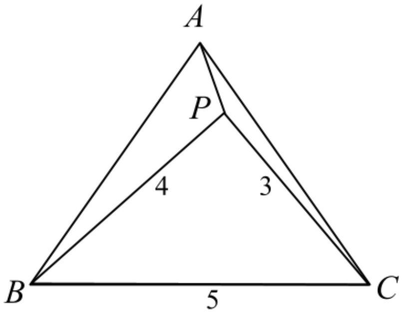
18. 氣象局測出在 20 小時期間，颱風中心的位置由恆春東南方 200 公里直線移動到恆春南 15°西的 100 公里處，試求颱風移動的平均速度是每小時幾公里？(A) $4\sqrt{3}$ (B) $5\sqrt{3}$ (C) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ (D) $10\sqrt{3}$

<解析>

夾角 60 度，距離$=\sqrt{200^2+100^2-2\cdot 200\cdot 100\frac{1}{2}}=100\sqrt{3}$

$100\sqrt{3}\div 20=5\sqrt{3}$，選 B。

19. $\triangle ABC$ 為邊長 5 公分的正三角形，P 點在三角形內部，若線段長度$\overline{PB}$=4，$\overline{PC}$=3，則 $\cos\angle ABP$=_______。(四捨五入到小數點後第二位，$\sqrt{2}$=1.414，$\sqrt{3}$=1.732) (A)0.72 (B)0.82 (C)0.92 (D)10.2



<解析>

$\because \overline{PB}=4$，$\overline{PC}=3$，$\overline{BC}=5$

$\therefore \triangle PBC$ 為直角三角形

$\therefore \angle BPC=90^\circ$

$\cos\angle ABP=\cos(60^\circ-\angle PBC)$

$=\cos 60^\circ\cos\angle PBC+\sin 60^\circ\sin\angle PBC$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{4+1.732\times 3}{10}=0.9196\fallingdotseq 0.92$，選 C。

20. 若 $x\in R$ 且 $y=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+5)^2}$，則 y 之最小值為_____。(A)2 (B)8 (C)3 (D)5

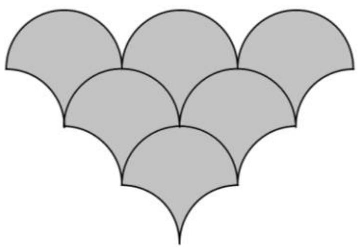
<解析>

$x\in R$

$y=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+5)^2}=|x-3|+|x+5|$

$\therefore y$ 之最小值$=|3-(-5)|=8$，選 B。

21. The figure on the right is composed of 6 semicircle arcs (半圓弧) and 6 $\frac{1}{4}$ arcs(弧). If the diameter is 3, what is the area of the gray part in square units?

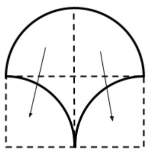


(A)9π (B)27 (C)30 (D)12π

<解析>

將圖形重新組合可補矩形

面積$=3\times\frac{3}{2}\times 6=27$，選 B。



22. 定義: n 階乘 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\cdots\times 3\times 2\times 1$，例如: $4!=4\times 3\times 2\times 1$，若 $x!=6!\times 7!$，則 x=?

(A)13 (B)9 (C)10 (D)42

<解析>

$x!=7!\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1=7!\times 8\times 9\times 10=10!$，則 $x=10$

選 C。

23. 數列 2、2^2、2^{2^2}、$2^{2^{2^2}}$、……至少第幾項會大於 1000^{1000}? ($2^3=2\times 2\times 2=8$)

(A)4 (B)5 (C)101 (D)1001

<解析>

① $1000^{1000}=(10^3)^{1000}$

② $a_1=2$

$a_2=2^2=2\times 2=4$

$a_3=2^{2^2}=2^4=16$

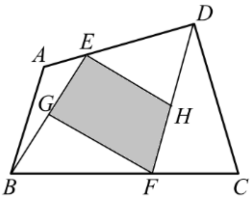
$a_4=2^{a_3}=2^{16}=2^{10}\times 2^6=1024\times 64=65536$

$a_5=2^{a_4}=2^{65536}=(2^{10})^{6553}\times 2^6=1024^{6553}\times 2^6>(10^3)^{6553}\times 64>(10^3)^{1000}$

故第 5 項，選 B。

24. Refer to the diagram, the area of quadrilateral $ABCD$ is 120 square units, $\overline{ED}=2\overline{AE}$, $\overline{BF}=2\overline{FC}$. G and H are midpoints of $\overline{BE}$ and $\overline{DF}$, respectively. What is the area of the shaded quadrilateal $EGFH$?

(A)30 (B)35 (C)40 (D)60

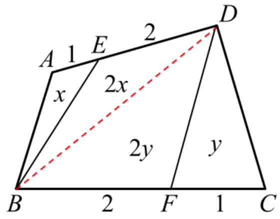


<解析>

①四邊形 $EBFD=2(x+y)$

四邊形 $ABCD=3(x+y)$

→四邊形 $EBFD=\frac{2}{3}\times$四邊形 $ABCD=\frac{2}{3}\times120=80$

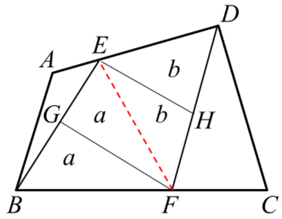


②四邊形 $EGFH=a+b$

四邊形 $EBFD=2(a+b)$

→四邊形 $EGFH=\frac{1}{2}\times$四邊形 $EBFD=\frac{1}{2}\times80=40$

選 C。



25.如右表所示，把奇數按照一定規律排列，那麼在帶圓圈的數中，前 20 個數之和為__________ (A)5710 (B)5720 (C)5730 (D)5740

49	51	53	55	57	59	61
47	17	19	21	23	25	63
45	15	1	3	5	27	65
43	13	11	9	7	29	67
41	39	37	35	33	31	69
	…	…	…	…	73	71

<解析>

①$a_2=7=7+8\times(1^2-1)=b_1$

$a_4=7+12\times2=7+24=7+8\times3=7+8\times(2^2-1)=b_2$

$a_6=7+12\times2+20\times2=7+8\times(3+5)=7+8\times(3^2-1)=b_3$

$a_8=7+12\times2+20\times2+28\times2=7+8\times(3+5+7)=7+8\times(4^2-1)=b_4$

....

$a_{20}=b_{10}=7+8\times(10^2-1)$

➔ $a_2+a_4+a_6+\ldots..+a_{20}=b_1+b_2+\ldots\ldots+b_{10}=7\times10+8\times(1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2)-8\times10$

➔$70+8\times\frac{10\times11\times21}{6}-80=3080-10=3070$

②$a_3=19=c_1$

$a_5=19+12+20=19+32=19+16\times2=c_2$

$a_7=19+12+20+20+28=19+80=19+16\times5=19+16\times(2+3)=c_3$

$a_9=19+12+20+20+28+28+36=19+16\times(2+3+4)=c_4$

$a_{11}=19+16\times(2+3+4+5)=c_5$

$a_{13}=19+16\times(2+3+4+5+6)=c_6=19+16\times\frac{(k-1)(2+k)}{2}$ (令 k=6)

$=19+8(k^2+k-2)=8k^2+8k+3=8\times6^2+8\times6+3$

....

$a_{19}=c_9=8\times9^2+8\times9+3$

$a_3+a_5+a_7+\ldots..+a_{19}=c_1+c_2+c_3+\ldots\ldots+c_9$

$=8(1^2+2^2+3^2+\ldots..+9^2)+8(1+2+3+\ldots+9)+3\times9$

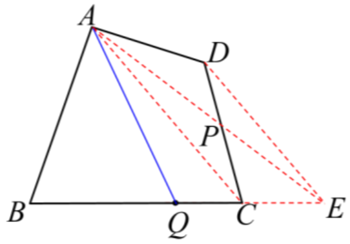
$=8\times\frac{9\times10\times19}{6}+8\times45+27=2280+360+27=2667$

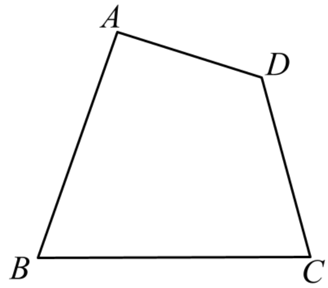
③ $a_1+(a_2+a_4+a_6+\ldots..+a_{20})+(a_3+a_5+a_7+\ldots..+a_{19})=7+3070+2667=5740$，選 D。

二、　計算題(25 分/25 分，共 50 分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. 老農夫有一塊四邊形的土地，他打算從 A 點畫一條直線把這塊土地平分。

(請寫出作圖方法及畫圖)





<解析>

①連接$\overline{AC}$

②作$\overline{DE}//\overline{AC}$，交$\overrightarrow{BC}$於 E 點

則$\triangle ADP=\triangle PCE$

$\rightarrow\triangle ABE=$四邊形 $ABCD$

③作$\overline{BE}$的中點 Q，連接$\overline{AQ}$，即為所求

2. If $0\le x\le \frac{\pi}{3}$, the maximum value and the minimum value of $f(x)=\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}$ are m, n , respectively. Find the value of m and n.

<解析>

令 $\sin x+\cos x=t\rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

$\because 0\le x\le\frac{\pi}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}=\frac{1+t^2-1}{t}=t$

$=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，

故 $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{7\pi}{12}\rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(x+\frac{\pi}{4})\le 1$，

$\therefore f(x)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$之 $Max=\sqrt{2}$，$Min=1$