第二十屆 IMC 國際數學競賽台灣區初賽

Twentieth International Mathematics Contest (Taiwan)

高中一年級組

考生姓名		試題總分	
准考證號碼			

◎參賽學生請將試題答案填寫到答案表內。

◎計算題需在試題空白處列出計算過程，只寫答案沒有計算過程，不予計分。

選擇題答案區

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

考試時間:60 分鐘 卷面總分:300 分

《考時時間尚未開始請勿翻閱》

一、 選擇題(每題 10 分，共 250 分)

1. 設 6^x-4·3^x-3·2^x+12=0 之兩根為 α、β，則 $\alpha^2+\beta^2$=______。(A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

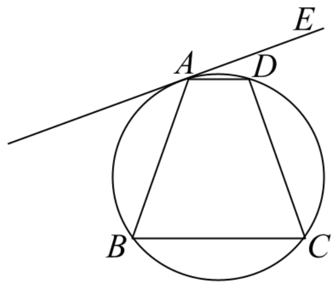
原式: $2^x\cdot3^x$ -4·3^x-3·2^x+12=0

→$3^x\cdot(2^x-4)-3(2^x-4)=0$

→$(2^x-4)(3^x-3)=0$

∴2^x-4 或 3^x-3→x=2 或 x=1

∴ $\alpha=2$，$\beta=1$→ $\alpha^2+\beta^2=5$，選 C。



2. As shown in the figure on the right, $\overleftrightarrow{AE}$ is tangent (切線) to the circumcircle of quadrilateral $ABCD$ at point A. If $\angle DAE$=12°, arc AB, arc BC and arc CD are equal in degree, then $\angle ABC$=? (A)48° (B)58° (C)68° (D)78°

<解析>

arc AD =12°x2=24°

arc AB= arc BC= arc CD=$\frac{1}{3}$(360°-24°)=112°

$\angle ABC$=$\frac{1}{2}$(112°+24°)=68°，選 C。

3. 設 a、b、c 為實數，若二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過(0, -1)且與 x 軸相切，下列正確的是哪幾個? ① $a<0$ ② $b>0$ ③c=-1 ④$b^2+4ac=0$ ⑤$a+b+c\leq0$
(A) ①、③、⑤ (B) ①、②、⑤ (C) ②、③、④ (D) ①、②、④

<解析>

令 $f(0)=-1$→$c=-1$，$b^2-4ac=0$→$b^2+4a=0$

過(0, -1)→$a<0$，b 皆有可能

(1, $f(1)$)在第四象限或切點→$f(x)a+b+c\leq0$

故①、③、⑤正確，選 A。

4. Andy observes the number of bacteria. It is found that every hour will increase by 3 times compared with the previous hour. If there are 90,000 bacteria now, how many bacteria were there 2 hours ago?
(A)45000 (B)30000 (C)11250 (D)10000

<解析>

令原來細菌數量是 x 隻

x×3×3=90000，x=90000÷9=10000

選 D。

5. x、y 滿足 L: 3x+4y=1，則$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$之最小值為_____。(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

<解析>

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$→P(x, y)到(1, 2)之距離

且 P 在 L: 3x+4y=1，故最小距離為$\frac{|3\times1+4\times2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$，選 B。

6. 設直線 L: $kx+3y+10=0$，與圓 C: $x^2+y^2=4$ 無交點，則符合 k 的正整數有幾個?
(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

<解析>

$\frac{10}{\sqrt{k^2+9}}>2$(圓的半徑)$\rightarrow\frac{5}{\sqrt{k^2+9}}>1$，$5>\sqrt{x^2+9}$，$k^2<16\rightarrow-4<k<4$，$k=1$、2、3

選 C。

7. 設 n 是正整數，則使得 1.25^n 整數部分為 10 位數，則最大的 n 值是多少?
(A)100 (B)101 (C)102 (D)103　　(log1.25≒0.0969)

<解析>

$10^9\le1.25^n<10^{10}$，且 $10^{0.0969}=1.25$

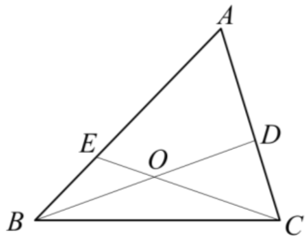
$\rightarrow10^9\le(10^{0.0969})^n<10^{10}$，$9\le0.0969n<10$

$\rightarrow92.8\le n<103.1$，$n=103$，選 D。

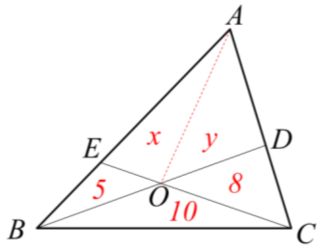
8. 校慶園遊會，郁芬到一處只賣紅茶及奶茶的攤位，紅茶一杯 10 元，奶茶一杯 20 元，郁芬想用僅有的預算 60 元，至少買兩杯飲料，在飲料供應充足的情況下，則所有可能的買法有幾種? (A)13 (B)12 (C)11 (D)10

<解析>
設紅茶買 x 杯，奶茶買 y 杯
①$10x+20y\le60$ ➔ $x+2y\le6$
②$x+y\ge2$
$x\ge0$，$y\ge0$，x、$y\in Z$
當 $y=0$，$x=2\sim6$，有 5 種
當 $y=1$，$x=1\sim4$，有 4 種
當 $y=2$，$x=0\sim2$，有 3 種
當 $y=3$，$x=0$　，有 1 種
共有 13 種，選 A。

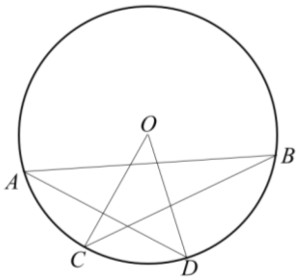
9. 如右圖，已知△OBE 的面積是 5，△OBC 的面積是 10，△OCD 的面積是 8，問四邊形 $AEOD$ 的面積是多少?
(A)20　(B)21　(C)22　(D)24



<解析>
連接$\overline{AO}$
△AOE:△AOC=$\overline{EO}$:$\overline{CO}$=△BOE:△BOC
$x:(y+8)=5:10\rightarrow5y+40=10x$，$y=2x-8$
△AOB:△AOD=$\overline{BO}$:$\overline{DO}$=△BOC:△DOC
$(x+5):y=10:8\rightarrow10y=8x+40$
$10(2x-8)=8x+40$，$12x=120$，$x=10$
$\therefore y=2\times10-8=12$
四邊形 $AEOD=x+y=10+12=22$，選 C。



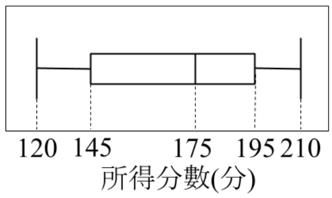
10. 圓 O 中，A、B、C、D 為圓上四點，已知$\overline{AD}\perp\overline{OC}$，$\angle ABC=23^\circ$，則$\angle ADO$ 的度數為何? (A)44° (B)45° (C)34° (D)35°



<解析>
$\because \overline{AD}\perp\overline{OC}$
$\therefore$arc CD= arc AC=2$\angle ABC$=46°
$\to\angle COD$= arc CD=46°
$\therefore\angle ADO$=180°-90°-46°=44°，選 A。

11. 袋中有 5 顆紅球與 3 顆白球，樂樂從袋中每次取一球，直到取完為止，則白球先取完的機率為何? (A)$\frac{3}{8}$ (B)$\frac{5}{8}$ (C)$\frac{3}{5}$ (D) $\frac{2}{8}$
<解析>
白球先取完=第 8 次取到紅球且前 7 次為 4 顆紅球與 3 顆白球作直線排列
$|S|=\frac{8!}{5!3!}=56$，$|A|=\frac{7!}{4!3!}=35$
$\therefore$白球先取完的機率$=\frac{|A|}{|S|}=\frac{35}{56}=\frac{5}{8}$，選 B。
<另解>
最後一次取紅球$=\frac{5}{8}$

12. 小珍與她的五位朋友參加保齡球比賽，右圖為她們六人所得分數的盒狀圖，若小珍所得到的分數恰為她們六人的平均數，則小珍得到多少分? (A)168 (B)169 (C)170 (D)171



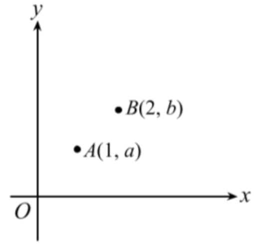
<解析>
假設六人分數由小到大: a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6
則 a_1=120、a_6=120
$6\times\frac{1}{4}=1.5\ \to\ Q_1=a_2=145$，$6\times\frac{3}{4}=4.5\ \to\ Q_3=a_5=195$
$6\times\frac{2}{4}=3\ \to\ Q_2=\frac{a_3+a_4}{2}=175$，$a_3+a_4=350$
小珍的分數=($a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$)÷6=(120+145+350+195+210)÷6=170，選 C。

13. 從 1~9 共 9 個數字，任取三個相異數字為一組，其和為奇數者共有幾種?(A)30 (B)40 (C)50 (D)60
<解析>
1~9 奇數有 5 個，偶數有 4 個
三數之和為奇數的情況:
①三數皆為奇數: C^5_3=10 種，②一個奇數和兩個偶數: $C^5_1\times C^4_2$=30 種
共有 10+30=40 種
故選 B。

14. 試求級數$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\ldots+\frac{1}{10\times11\times12}=$______。(A) $\frac{35}{264}$ (B) $\frac{45}{264}$ (C) $\frac{55}{264}$ (D) $\frac{65}{264}$
<解析>
原式$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3})+\frac{1}{2}(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4})+\ldots\ldots+\frac{1}{2}(\frac{1}{10\times11}-\frac{1}{11\times12})=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{132})=\frac{1}{2}\times\frac{65}{132}=\frac{65}{264}$
選 D。

15. 如右圖，投擲一粒骰子，第一回出現點數為 a，第二回出現點數為 b，若 $A(1, a)$、$B(2, b)$。則$\overleftrightarrow{AB}$通過原點的機率為何?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{12}$



<解析>

(a, b)所有情況=6x6=36

$\overleftrightarrow{AB}$通過原點➔方程式: $y=kx$

$(1, a)$、$(2, b)$代入 $a=k$，$b=2k$

①$k=1\to a=1$，$b=2$

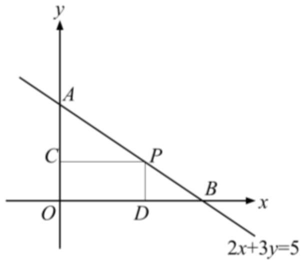
②$k=2\to a=2$，$b=4$

③$k=3\to a=3$，$b=6$

有 3 種情況，則機率=$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$，選 D。

16. 如右圖，過 A、B 兩點的直線方程式為 $2x+3y=5$，且 P 點為$\overline{AB}$上任一點，求矩形 $OCPD$ 面積的最大值?

(A) $\frac{25}{12}$ (B) $\frac{25}{24}$ (C) $\frac{25}{36}$ (D) $\frac{25}{48}$



<解析>

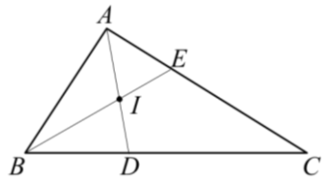
設 P 點$(x, y)\to 2x+3y=5\to y=\frac{5-2x}{3}$

矩形 OCPD 面積 $k=xy=x(\frac{5-2x}{3})=-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x$

$\therefore x=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{5}{3}}{2(\frac{-2}{3})}=\frac{5}{4}\to k$ 有最大值 $-\frac{2}{3}\times(\frac{5}{4})^2+\frac{5}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{25}{24}$

選 B。

17. $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$\angle A$、$\angle B$ 的角平分線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$交於 I，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=12$，求$\overline{\mathrm{AI}}:\overline{\mathrm{ID}}$=? (A)17:13 (B)13:17 (C)15:13 (D)13:15



<解析>

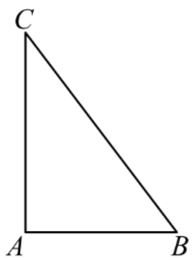
$\overline{BC}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，$\overline{AD}$為角平分線

$\therefore\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=5:12\to\overline{BD}=13\times\frac{5}{17}=\frac{65}{17}$

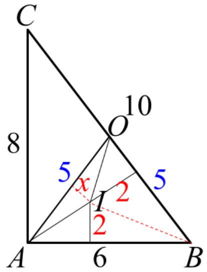
$\overline{BE}$為角平分線

$\therefore\overline{\mathrm{AI}}:\overline{\mathrm{ID}}=\overline{AB}:\overline{BD}=5:\frac{65}{17}=17:13$，選 A。

18. 直角$\triangle ABC$，$\angle A=90^\circ$，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=8$，其外心 O，內心 I，求 I 到$\overline{AO}$的距離? (A)1 (B)$\frac{2}{3}$ (C)$\frac{2}{5}$ (D)$\frac{3}{4}$



<解析>



$\overline{BC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，$r=\frac{6+8-10}{2}=2$

$\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}=\frac{10}{2}=5$

設 I 到$\overline{AO}$的距離=x

$\triangle OAB=\triangle OAI+\triangle IAB+\triangle OBI$

$\frac{1}{2}\cdot5\cdot x+\frac{1}{2}\cdot6\cdot2+\frac{1}{2}\cdot5\cdot2=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\times8}{2}$，$5x+12+10=24$

$x=\frac{2}{5}$，選 C。

19. 從 4 位男生和 2 位女生中任選 2 人組成一隊去參加學科競賽，則至少有 1 位女生被選中的機率為何? (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$

<解析>

6 位任選 2 位有 $C_2^6=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

4 位男生選 2 位(都沒選到女生)有 $C_2^4=\frac{4\times3}{2\times1}=6$

至少有一位女生有 15-6=9 種，機率 $=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$，選 D。

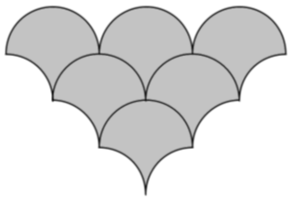
20. 若 $x\in R$，且 $y=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+5)^2}$ ，則 y 之最小值為何? (A)2 (B)8 (C)3 (D)5

<解析>

$x\in R$

$y=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+5)^2}=|x-3|+|x+5|$

$\therefore$y 之最小值 $=|3-(-5)|=8$，選 B。

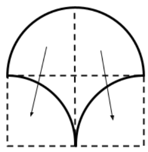


21. The figure on the right is composed of 6 semicircle arcs (半圓弧) and 6 $\frac{1}{4}$ arcs(弧). If the diameter is 3, what is the area of the gray part in square units? (A)9π (B)27 (C)30 (D)12π

<解析>

將圖形重新組合可補矩形

面積 $=3\times\frac{3}{2}\times6=27$，選 B。



22. 定義: n 階乘 $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\cdots\times3\times2\times1$，例如: $4!=4\times3\times2\times1$，若 $x!=6!\times7!$，則 x=? (A)13 (B)9 (C)10 (D)42

<解析>

$x!=7!\times6\times5\times4\times3\times2\times1=7!\times8\times9\times10=10!$，則 $x=10$

選 C。

23. 數列 2、2^2、2^{2^2}、$2^{2^{2^2}}$ 、……至少第幾項會大於 1000^{1000}? ($2^3=2\times2\times2=8$)

(A)4 (B)5 (C)101 (D)1001

<解析>

①$1000^{1000}=(10^3)^{1000}$

② $a_1=2$

$a_2=2^2=2\times2=4$

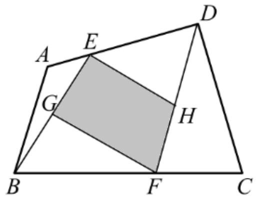
$a_3=2^{2^2}=2^4=16$

$a_4=2^{a_3}=2^{16}=2^{10}\times2^6=1024\times64=65536$

$a_5=2^{a_4}=2^{65536}=(2^{10})^{6553}\times2^6=1024^{6553}\times2^6>(10^3)^{6553}\times64>(10^3)^{1000}$

故第 5 項，選 B。

24. Refer to the diagram, the area of quadrilateral *ABCD* is 120 square units, $\overline{ED}=2\overline{AE}$, $\overline{BF}=2\overline{FC}$. *G* and *H* are midpoints of $\overline{BE}$ and $\overline{DF}$, respectively. What is the area of the shaded quadrilateal *EGFH*?
(A)30 (B)35 (C)40 (D)60

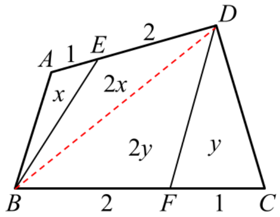


<解析>

①四邊形 $EBFD=2(x+y)$

四邊形 $ABCD=3(x+y)$

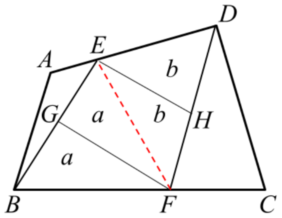
→四邊形 $EBFD=\frac{2}{3}\times$四邊形 $ABCD=\frac{2}{3}\times 120=80$



②四邊形 $EGFH=a+b$

四邊形 $EBFD=2(a+b)$

→四邊形 $EGFH=\frac{1}{2}\times$四邊形 $EBFD=\frac{1}{2}\times 80=40$



25.如右表所示，把奇數按照一定規律排列，那麼在帶圓圈的數中，前 20 個數之和為__________ (A)5710 (B)5720 (C)5730 (D)5740

49	51	53	55	57	59	61
47	17	19	21	23	25	63
45	15	1	3	5	27	65
43	13	11	9	7	29	67
41	39	37	35	33	31	69
	…	…	…	…	73	71

<解析>

①$a_2=7=7+8\times(1^2-1)=b_1$

$a_4=7+12\times2=7+24=7+8\times3=7+8\times(2^2-1)=b_2$

$a_6=7+12\times2+20\times2=7+8\times(3+5)=7+8\times(3^2-1)=b_3$

$a_8=7+12\times2+20\times2+28\times2=7+8\times(3+5+7)=7+8\times(4^2-1)=b_4$

…….

$a_{20}=b_{10}=7+8\times(10^2-1)$

➔ $a_2+a_4+a_6+\ldots..+a_{20}=b_1+b_2+\ldots\ldots+b_{10}=7\times10+8\times(1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2)-8\times10$

➔$70+8\times\frac{10\times11\times21}{6}-80=3080-10=3070$

②$a_3=19=c_1$

$a_5=19+12+20=19+32=19+16\times2=c_2$

$a_7=19+12+20+20+28=19+80=19+16\times5=19+16\times(2+3)=c_3$

$a_9=19+12+20+20+28+28+36=19+16\times(2+3+4)=c_4$

$a_{11}=19+16\times(2+3+4+5)=c_5$

$a_{13}=19+16\times(2+3+4+5+6)=c_6=19+16\times\frac{(k-1)(2+k)}{2}$ (令 k=6)

$=19+8(k^2+k-2)=8k^2+8k+3=8\times6^2+8\times6+3$

…….

$a_{19}=c_9=8\times9^2+8\times9+3$

$a_3+a_5+a_7+\ldots..+a_{19}=c_1+c_2+c_3+\ldots\ldots+c_9$

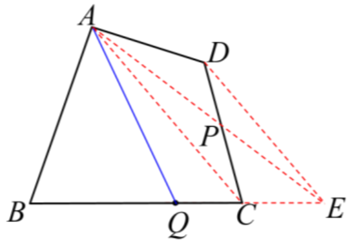
$=8(1^2+2^2+3^2+\ldots..+9^2)+8(1+2+3+\ldots+9)+3\times9$

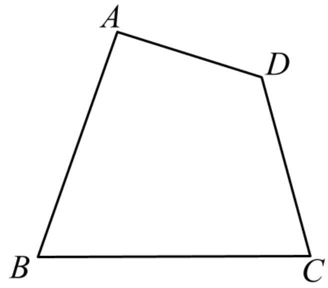
$=8\times\frac{9\times10\times19}{6}+8\times45+27=2280+360+27=2667$

③ $a_1+(a_2+a_4+a_6+\ldots..+a_{20})+(a_3+a_5+a_7+\ldots..+a_{19})=7+3070+2667=5740$，選 D。

二、 計算題(25 分/25 分，共 50 分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. 老農夫有一塊四邊形的土地，他打算從 A 點畫一條直線把這塊土地平分。
(請寫出作圖方法及畫圖)





<解析>
①連接$\overline{AC}$
②作$\overline{DE}//\overline{AC}$，交$\overrightarrow{BC}$於 E 點
則$\triangle ADP=\triangle PCE$
→$\triangle ABE=$四邊形 $ABCD$
③作$\overline{BE}$的中點 Q，連接$\overline{AQ}$，即為所求

2. Suppose x is a real number, what is the range that satisfies the inequality $|x-2|+2|x+1|\le 5$?

<解析>
①當 $x\ge 2$ 時，$(x-2)+2(x+1)\le 5$
→$3x\le 5$，$x\le \frac{5}{3}$(不合)
②當$-1\le x<2$ 時，$-(x-2)+2(x+1)\le 5$
→$x\le 1$，$-1\le x\le 1$
③當 $x<-1$ 時，$-(x-2)-2(x+1)\le 5$
→$-3x\le 5$，$x\ge -\frac{5}{3}$，$-\frac{5}{3}\le x<-1$
根據①②③
得$-\frac{5}{3}\le x\le 1$