

國中三年級(初賽)試卷

考試時間: 60 分鐘 卷面總分: 300 分 得分: _____

一、選擇題(每題 10 分, 共 250 分)

- (B) 1. $A(5, 4)$ 、 $B(20, -6)$ 、 $C(-1, k)$ 為平面上相異三點, 若 A 、 B 、 C 三點在同一直線上, 則 k 之值為多少? (A)7 (B)8 (C)9 (D)10

<解析>

$y=ax+b$, 代入 $(5, 4)$ 、 $(20, -6)$

$$\begin{cases} 5a+b=4 \\ 20a+b=-6 \end{cases} \rightarrow 15a=-10, a=-\frac{2}{3}, b=\frac{22}{3}$$

$y=-\frac{2}{3}x+\frac{22}{3}$, 代入 $(-1, k)$

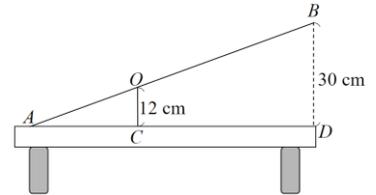
$$\therefore k=(-\frac{2}{3})\times(-1)+\frac{22}{3}=8, \text{選 B。}$$

- (B) 2. Use a bracket \overline{OC} to support a wooden stick \overline{AB} on a horizontal table top. Press point A on the desktop, as shown on the right, and point B is 30 cm away from the desktop. The height of the bracket \overline{OC} is 12 cm. Now press point B on the desktop, the height of point A from the desktop is _____ cm. (A)18 (B)20 (C)22 (D)24

<解析>

$$\because \overline{OC} \parallel \overline{BD} \rightarrow \overline{AO} : \overline{AB} = 12 : 30 = 2 : 5, \overline{AO} : \overline{OB} = 2 : 3$$

$$\because \overline{OC} \parallel \overline{AD} \rightarrow \overline{BO} : \overline{OA} = 3 : 2, \overline{BO} : \overline{BA} = 3 : 5 = 12 : x, x = 20, \text{選 B。}$$

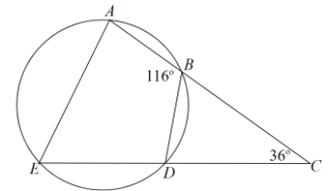


- (C) 3. 如圖, $\angle ABD = 116^\circ$, $\angle BCD = 36^\circ$, 則 $\angle A = ?$
(A) 70° (B) 72° (C) 80° (D) 88°

<解析>

$\because ABDE$ 是圓內接四邊形

$$\therefore \angle E = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ \rightarrow \angle A = 180^\circ - 64^\circ - 36^\circ = 80^\circ, \text{選 C。}$$

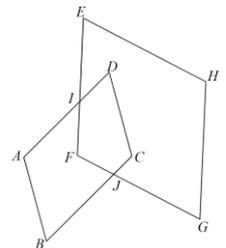


- (C) 4. 如圖, 平行四邊形 $ABCD$ 與菱形 $EFGH$ 相交於 I 、 J 兩點, 若 $\angle B = 60^\circ$, $\angle EHG = 115^\circ$, $\angle BJK = 120^\circ$, 則 $\angle AIE =$ _____ 度。(A)115 (B)120 (C)125 (D)130

<解析>

$$\textcircled{1} \angle D = \angle B = 60^\circ; \angle F = \angle EHG = 115^\circ; \angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ; \angle BJK = \angle FJC = 120^\circ$$

$$\textcircled{2} \text{五邊形 } DCJFI \text{ 中, } \angle AIE = \angle FID = 540^\circ - 120^\circ - 60^\circ - 115^\circ - 120^\circ = 125^\circ, \text{選 C。}$$



- (C) 5. 多項式 $F(x)$ 除以多項式 $G(x)$ ，得到商式 $Q(x)$ ，餘式 R ，則 $3F(x) \div G(x)$ 的商式和餘式，下列何者正確？
 (A) 商式為 $3Q(x)$ ，餘式為 R (B) 商式為 $Q(x)$ ，餘式為 $3R$
 (C) 商式為 $3Q(x)$ ，餘式為 $3R$ (D) 商式為 $\frac{Q(x)}{3}$ ，餘式為 R

<解析>

$$F(x) = G(x) \times Q(x) + R \rightarrow 3F(x) = G(x) \times 3Q(x) + 3R$$

\therefore 商式 = $3Q(x)$ ，餘式 = $3R$ ，選 C。

- (D) 6. 設 $x^3 - x^2 + kx + 16$ 為 $x-4$ 的倍式，也是 $x-1$ 的倍式，則 $k=?$ (A) 12 (B) -12 (C) 16 (D) -16

<解析>

$$F(x) = x^3 - x^2 + kx + 16 = (x-4)(x-1)Q(x)$$

$$F(1) = 1 - 1 + k + 16 = 0, k = -16, \text{選 D。}$$

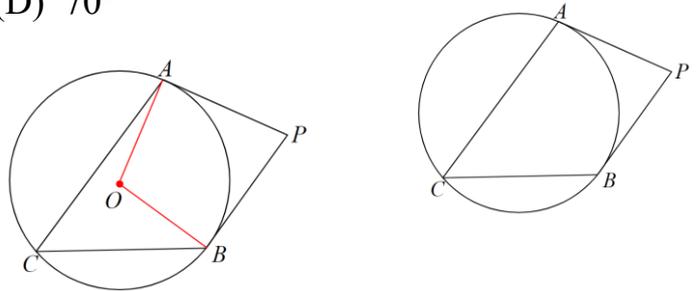
- (B) 7. 如圖， \overline{PA} 、 \overline{PB} 切圓於 A 、 B 兩點， C 點在圓上，若 $\angle P = 80^\circ$ ，則 $\angle ACB =$ _____ 度？ (A) 40° (B) 50° (C) 60° (D) 70°

<解析>

連接半徑 \overline{OA} 、 \overline{OB}

$$\angle AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ, \text{選 B。}$$



- (A) 8. 如右圖，三直線 \overleftrightarrow{AD} 、 \overleftrightarrow{AE} 、 \overleftrightarrow{BC} 分別切圓 O 於 D 、 E 、 F 三點，若 $\overline{AD} = 8$ ，則 $\triangle ABC$ 周長 = ? (A) 16 (B) 15 (C) 18 (D) 17

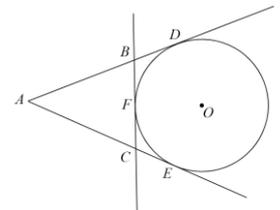
<解析>

A 、 B 、 C 分別是兩切線的交點

$$\therefore \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AC} + \overline{CE}, \text{且 } \overline{BD} = \overline{BF}, \overline{CE} = \overline{CF}$$

$$\therefore \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{AC} + \overline{CF}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周長} = \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{AC} + \overline{CF} = 8 + 8 = 16, \text{選 A。}$$



- (C) 9. 如右圖， \overline{AB} 為兩同心圓中大圓的弦，交小圓於 C 、 D 兩點。若 $\overline{AB} = 16$ ， $\overline{CD} = 12$ ， \overline{AB} 的弦心距為 5，求兩圓所圍成的環形區域(灰色部分)面積為何？ (A) 32π (B) 30π (C) 28π (D) 26π

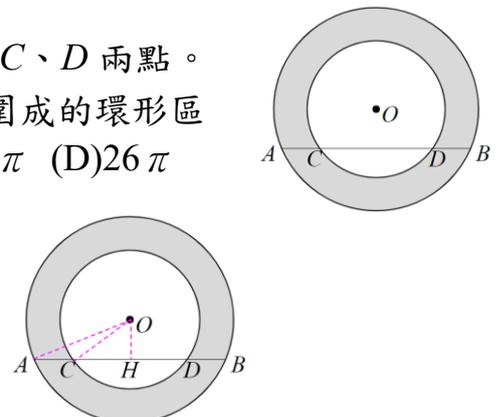
<解析>

過 O 點作 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ ，交 \overline{AB} 於 H 點，且連接 \overline{OC} 、 \overline{OA}

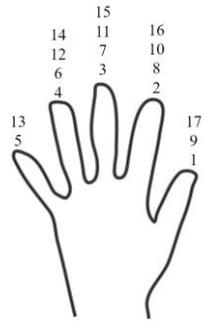
$$\overline{OA}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{AH}^2 = 5^2 + 8^2 = 89$$

$$\overline{OC}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{CH}^2 = 5^2 + 6^2 = 61$$

$$\text{環形區域} = \overline{OA}^2 \pi - \overline{OC}^2 \pi = (\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2) \pi = 28\pi, \text{選 C。}$$



- (B)10. 如圖，從大拇指開始數，大拇指是 1，食指是 2，中指是 3，無名指是 4，小拇指是 5；反方向數回去，無名指是 6，中指是 7，食指是 8，大拇指是 9；再依序反方向數回去，食指是 10，……。依此規律，2023 會在哪一根手指上？(A)大拇指 (B)中指 (C)無名指 (D)小指



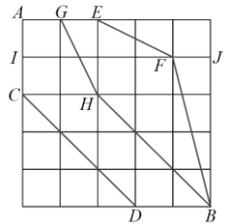
<解析>

$$2023 \div 8 = 252 \dots 7$$

∴ 會出現在中指，選 B。

大指	食指	中指	無名指	小拇指
1	2	3	4	5
	8	7	6	
9	10	11	12	13
	16	15	14	

- (B)11. The picture on the right is a checkerboard with an interval of 1 cm. Andy's route is $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$. Paul's route is $A \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow B$. Judy's route is $A \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow B$. Joyce's route is $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow B$. Which person has the shortest distance? (A) Andy (B) Paul (C) Judy (D) Joyce



<解析>

$$\text{Andy 的路徑} = 2 + 3\sqrt{2} + 2 = 4 + 3\sqrt{2} \approx 8.242$$

$$\text{Paul 的路徑} = 1 + \sqrt{5} + 3\sqrt{2} \approx 7.478$$

$$\text{Judy 的路徑} = 1 + 5 + 4 = 10$$

$$\text{Joyce 的路徑} = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{17} \approx 8.359$$

且 $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{17} \approx 4.123$, 選 B。

- (B)12. 如右圖， P 為圓 O 外一點， \overline{PA} 、 \overline{PB} 切圓 O 於 A 、 B ，且 $\angle P = 90^\circ$ ；若 \overline{CD} 切圓 O 於 E 且交 \overline{PA} 、 \overline{PB} 於 C 、 D ， $\overline{AC} = 2$ ， $\overline{BD} = 3$ ，則圓 O 的面積為何？(A) 25π (B) 36π (C) 49π (D) 64π

<解析>

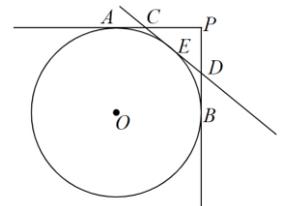
假設 $\overline{CP} = x$ ，且 C 、 D 、 P 分別是兩切線的交點

$$\therefore \overline{AP} = \overline{BP} \rightarrow x + 2 = \overline{PD} + 3, \overline{PD} = x - 1$$

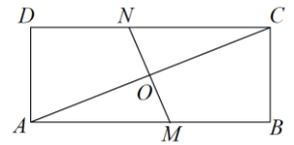
$$\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{DE} = \overline{AC} + \overline{DB} = 2 + 3 = 5$$

$$\therefore \overline{CD}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PD}^2 \rightarrow 5^2 = x^2 + (x-1)^2, x = 4$$

則 $\overline{PA} = 4 + 2 = 6$ ，且 $\overline{PA} = \overline{OA}$ ，圓 O 的面積 $= \overline{OA}^2 \pi = 36\pi$ ，選 B。



- (B) 13. 如右圖， $ABCD$ 是一張矩形紙張， $\overline{AD}=5$ ， $\overline{AB}=12$ ，將此張紙片摺疊使 A 、 C 兩頂點重合，摺痕為 \overline{MN} ，求 \overline{MN} =?



- (A) $\frac{71}{12}$ (B) $\frac{65}{12}$ (C) $\frac{67}{12}$ (D) $\frac{69}{12}$

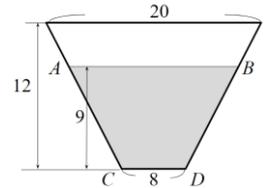
<解析>

$\because A$ 、 C 兩頂點重合 $\rightarrow \overline{MN} \perp \overline{AC}$ 且 \overline{MN} 平分 \overline{AC}

$\therefore \triangle CNO \sim \triangle CAD$ (AA 相似)，且 $\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$\therefore \overline{NO} : 5 = 6.5 : 12$ ， $\overline{NO} = \frac{32.5}{12} = \frac{325}{120} = \frac{65}{24}$ ， $\overline{MN} = 2\overline{NO} = 2 \times \frac{65}{24} = \frac{65}{12}$

- (B) 14. As shown in the picture, the side of the bucket is trapezoidal, and the thickness of the bucket itself is not counted. The bottom surface of the bucket is 8 cm wide, and the top opening of the bucket is 20 cm wide. The bucket height is 12 cm. Peter fills the bucket with a depth of 9 cm in bucket. What is the length of the liquid level AB in cm? (A) 20 cm (B) 17 cm (C) 12 cm (D) 8 cm

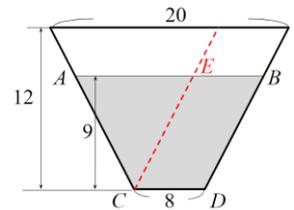


<解析>

過 C 點作， $\overline{CE} \parallel \overline{BD}$

$\overline{BE} = \overline{CD} = 8 \rightarrow 9 : 12 = \overline{AE} : (20 - 8)$ ， $\overline{AE} = 9$

$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = 8 + 9 = 17$ ，選 B。



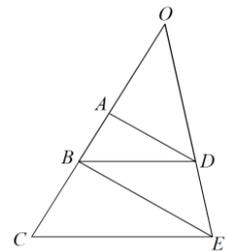
- (B) 15. 如圖， $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ ， $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$ ，若 $\overline{OB} = 12$ ， $\overline{OC} = 16$ ，則 $\overline{AB} = ?$
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

<解析>

假設 $\overline{AB} = x$ ，且 $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ ， $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$

$\therefore \overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OD} : \overline{OE} = \overline{OB} : \overline{OC} \rightarrow (12 - x) : 12 = 12 : 16$ ， $144 = 192 - 16x$ ， $x = 3$

$\therefore \overline{AB} = 3$ ，選 B。



- (A) 16. 若一正 n 邊形的一個外角恰等於一正 m 邊形的一個內角，則 $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = ?$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$

<解析>

$\frac{360^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{m}$ ， $\frac{360^\circ}{n} + \frac{360^\circ}{m} = 180^\circ$ ， $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$

選 A。

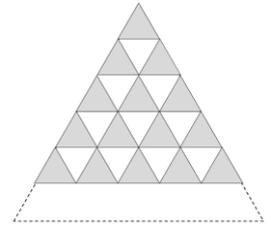
- (B) 17. 右圖是由灰、白兩種全等三角形瓷磚，有規律排列而成。若共用了 441 塊瓷磚，則其中灰色瓷磚有多少塊? (A) 210 (B) 231 (C) 253 (D) 279

<解析>

假設共排了 n 層

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2=441, n=21$$

$$\text{灰色瓷磚}=1+2+3+\dots+21=(1+21)\times 21\div 2=231, \text{選 B。}$$



- (B)18. 芸軒開了一家超商，一個賣 130 元的商品，通常一天可以賣 350 個，若此商品每加價 1 元，則每天少賣 2 個，某日該商品共賣得 46500 元，此商品一個可能賣 a 元或 b 元，則 $a+b=?$ (A)295 (B)305 (C)315 (D)325

<解析>

假設每個加價 x 元

$$(130+x)(350-2x)=46500$$

$$45500+350x-260x-2x^2=46500$$

$$2x^2-90x+1000=0, x^2-45x+500=0$$

$$(x-25)(x-20)=0$$

$$\therefore x=25 \text{ 或 } x=20$$

商品可能賣 $130+25=155$ 或 $130+20=150$

則 $a+b=150+155=305$ ，選 B。

- (B)19. If a, b and c are real numbers such that $a^2+b^2+c^2=9$, then the maximum numerical value of $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ is _____. (A)30 (B)27 (C)15 (D)18

<解析>

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$\therefore 2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ac)$$

$$\therefore 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ac)=2(a^2+b^2+c^2)-[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$$

且 $(a+b+c)^2 \geq 0$ ，當 $a+b+c=0$ ，有最大值 $=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=3 \times 9+0=27$ ，選 B。

$$[a=-(b+c) \text{ 時，} a^2=(b+c)^2=\frac{9}{2}, \text{ 即 } a=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}, b=-\frac{3\sqrt{2}}{2}, c=0]$$

- (D)20. 如圖所示，根據數字間的規律，找出 $x=?$
(A)16 (B)14 (C)12 (D)10

<解析>

$$15+13=7+21$$

$$2+8=4+6$$

$$7+7=3+11$$

$$10+x=4+16$$

$$\therefore x=20-10=10, \text{選 D。}$$

15	2	7	10
7	4	3	4
21	6	11	16
13	8	7	x

- (B)21. 一把鑰匙開一把鎖，現在有不同的 12 把鎖，但它們各自的鑰匙全部放亂了，我們最多需要試開多少次就可以確保把它們重新配對好? (A)55 (B)66 (C)110 (D)132

<解析>

$$11+10+9+\dots+1=(11+1)\times 11\div 2=66(\text{次})$$

選 B。

- (D)22. 右表中 16 個數:

①任找一個數字圈起來，再把圈起來的數字所在的行、列其他的數字打×。②剩下 9 個數字中，任找一個數字圈起來，再把圈起來的數字所在的行、列其他的數字打×。③剩下 4 個數字中，任找一個數字圈起來，再把圈起來的數字所在的行、列其他的數字打×。④最後剩下 1 個數字圈起來。

<i>r</i>	<i>v</i>	<i>m</i>	1
<i>t</i>	<i>w</i>	<i>n</i>	5
<i>s</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	4
16	15	12	10

圈起來 4 個數字相加的和是固定的，請問下列何者錯誤? (A) $m=3$ (B) $r=7$ (C) $w=10$ (D) $p=10$

<解析>

$$\text{和} = a+b+c+d+x+y+z$$

$$m=1+(12-10)=3; v=3+(15-12)=6$$

$$r=6+(16-15)=7; w=5+(15-10)=10$$

$$p=4+(15-10)=9$$

∴選 D。

$a+z$	$a+y$	$a+x$	a
$b+z$	$b+y$	$b+x$	b
$c+z$	$c+y$	$c+x$	c
$d+z$	$d+y$	$d+x$	d

- (C)23. The right column is the division of positive integers, the remainder is 7, and the number in the bold box is not 0. Find $a+b-c-d=?$ (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

因為餘數是 7，除數 $a=8$ 或 $a=9$

當 $a=8$

當 $a=9$ (不合)

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{1} \\ \mathbf{8} \overline{) 9 \ 7 \ 5} \\ \underline{8} \\ \boxed{1} \ 7 \\ \boxed{1} \ 6 \\ \hline \ \boxed{1} \ \boxed{5} \\ \ \underline{\boxed{8}} \\ \ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{1} \boxed{1} \\ \mathbf{9} \overline{) 9 \ 6} \\ \underline{9} \\ \boxed{0} \\ \\ \\ \ \boxed{1} \ \boxed{6} \\ \ \underline{\boxed{9}} \\ \ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ \mathbf{a} \overline{) \square \square \ \mathbf{b}} \\ \square \\ \hline \square \ \mathbf{d} \\ \square \ \mathbf{c} \ \square \\ \hline \ \square \ \square \\ \ \square \\ \hline \ 7 \end{array}$$

∴ $a=8, b=5, c=1, d=7$ ，則 $8+5-1-7=5$ ，選 C。

- (A)24. 通訊公司員工有 3 天連假，員工可從 12 月 17 日(六)到 12 月 24 日(六)，這 8 天中連續 3 天放假，用抽籤的方式來決定，員工云蓉抽中星期六或星期日的機率是多少? (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{7}$

<解析>

(六、日、一)，(日、一、二)，(一、二、三)，(二、三、四)，(三、四、五)，(四、五、六)
共有 6 種

其中星期六或星期日有 3 種，所以機率 $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ，選 A。

- (B)25. $n!$ 表示 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$ (例如： $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$)，如果計算 $15! = 130767a368000$ ，則 $a = ?$ (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

$15!$ 的質數有 2、3、5、7、11、13

$\therefore 130767a368000$ 符合 11 的倍數

$(3+7+7+3+8+0)-(1+0+6+a+6+0+0)$ 是 0 或 11 的倍數

$28-13-a=0$ ， $a=15$ (不合)

$28-13-a=11$ ， $a=4$ ，選 B。

<另解>

$15!$ 是 9 的倍數

$1+3+7+6+7+a+3+6+8$ 是 9 的倍數

$41+a=45$ ， $a=4$

二、 計算題(25 分/25 分，共 50 分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. 如圖，已知四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形， F 是 \overline{AD} 上一點， \overline{BF} 和 \overline{CD} 相交於 E ， \overline{AC} 和 \overline{BF} 相交於 G ，若 $\triangle AGF$ 的面積為 4 平方單位， $\triangle BGC$ 的面積為 9 平方單位，則四邊形 $FGCD$ 的面積為多少平方單位?

<解析>

$\triangle AGF \sim \triangle BGC$

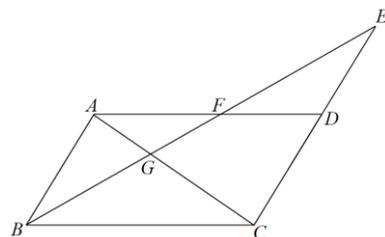
$\therefore \overline{FG}^2 : \overline{BG}^2 = 4 : 9 \rightarrow \overline{FG} : \overline{BG} = 2 : 3$

$\triangle AGF : \triangle ABG = 2 : 3 \rightarrow 4 : \triangle ABG = 2 : 3$ ， $\triangle ABG = 6$

$\triangle ABC = \triangle ABG + \triangle BGC = 6 + 9 = 15$ ，且 $\triangle ABC = \triangle ADC$

四邊形 $FGCD$ 的面積 $= \triangle ADC - \triangle ABG = 15 - 4 = 11$ (平方單位)

答: 11 平方單位



2. 民國年數加上 1911 就是西元年數，例如：民國 74 年，西元 $74+1911=1985$ 年，今年是 2022 年，請你用「你的年齡 x 歲，你的手機號碼最後兩碼是 y 」，求出下列 \square 是多少？

① 想一下你(妳)的手機號碼的最後兩位數字

② 把這個數字乘以 8

③ 然後加上 16，再乘以 125

④ 得到的積數除以 10

⑤ 把得到的數加上 \square

⑥ 最後一個步驟，用這個和數減去你(妳)出生的西元年，現在你(妳)看到的四位數的數字，前兩位數是你(妳)的手機號碼最後兩位數，接下來就是你(妳)的實際年齡。

<解析>

年齡 x 歲 \rightarrow 出生 $(2022-x)$ 年

$$(8y+16) \times 125 \div 10 + \square - (2022-x) = 100y+x$$

$$100y+200+\square-2022+x=100y+x$$

$$200+\square-2022=0$$

$$\square=2022-200=1822$$

答： $\square=1822$