

# 第十九屆 IMC 國際數學競賽初賽(台灣)

The 19th IMC International Mathematics Preliminary Contest (Taiwan)

## 國中二年級(初賽)試卷

考試時間: 60 分鐘 卷面總分: 300 分 得分: \_\_\_\_\_

### 一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

- ( A ) 1. 有一個長方體，底面是一個正方形，如果此長方體的長、寬、高皆大於 1 的整數，且體積是 294 立方公分，請你求出這個長方體的表面積是多少平方公分?  
(A)266 (B)276 (C)286 (D)296

<解析>

$294=2 \times 3 \times 7^2$ ，且底面是一個正方形

故正方形邊長=7cm，高=6 公分

其表面積= $(7 \times 7 + 7 \times 6 + 6 \times 7) \times 2 = 266$ ，選 A。

- ( B ) 2. 某種商品推出甲、乙、丙三種不同重量的包裝，其售價如右表，試問哪一種包裝最便宜?  
(A)甲 (B)乙 (C)丙 (D)都一樣

包裝	甲	乙	丙
重量(公克)	650	1100	1500
售價(元)	130	150	230

<解析>

甲包裝每公克= $\frac{130}{650} = \frac{1}{5} = 0.2$ (元)

乙包裝每公克= $\frac{150}{1100} = \frac{15}{110} = \frac{3}{22} \approx 0.13$ (元)

丙包裝每公克= $\frac{230}{1500} = \frac{23}{150} \approx 0.15$ (元)

∴乙包裝最便宜，選 B。

- ( A ) 3. 甲、乙兩人原有錢數的比為 13 : 15，若兩人同時用去 110 元後，剩下的錢數比為 1 : 2，則甲原來有多少元? (A)130 (B)143 (C)156 (D)169

<解析>

假設甲原有  $13x$  元，乙原有  $15x$  元

$(13x-110):(15x-110)=1:2 \rightarrow 15x-110=26x-220, 11x=110, x=10$

故甲有 130 元，選 A。

- ( B ) 4. 計算  $\frac{2023 \times 2021}{2022} + \frac{1}{2022}$  之值為何? (A)2021 (B)2022 (C)2023 (D)2024

<解析>

$\frac{2023 \times 2021}{2022} + \frac{1}{2022} = \frac{(2022+1)(2021-1)+1}{2022} = \frac{2022^2-1+1}{2022} = 2022$ ，選 B。

- ( C )5.  $A$  is a positive integer. If  $\sqrt{20A}$  is an integer and  $A$  is a three-digit number, what is the sum of all the values of  $A$ ? (A)4775 (B) 4855 (C) 4925 (D)5035

<解析>

$$20=2^2 \times 5 \rightarrow 20A=2^2 \times 5 \times A$$

$A$ 至少是三位數

$$A=5, 5 \times 2^2, 5 \times 3^2, 5 \times 4^2, 5 \times 5^2, 5 \times 6^2, 5 \times 7^2, 5 \times 8^2, 5 \times 9^2, \dots, 5 \times 14^2$$

$$\therefore A=5 \times (25+36+49+64+81+100+121+144+169+196)=4925, \text{選 C。}$$

- ( A )6. 設多項式 $x^3+6x^2+8x-1$ 除以多項式 $ax+b$ 後，得商式為 $x^2+3x-1$ ，餘式為2，則 $ax+b=?$  (A)3 (B)-3 (C)4 (D)-4

<解析>

$$x^3+6x^2+8x-1-2=x^3+6x^2+8x-3$$

$$(x^3+6x^2+8x-3) \div (x^2+3x-1)=x+3$$

$$\therefore a=1, b=3, ax+b=3, \text{選 A。}$$

- ( D )7. 某校學生排練校慶大會舞，人數在2000~3500人之間，且排成每排60人的長方形或每排72人的長方形都剩下10人，則學生人數不可能為多少人? (A)2170 (B)2530 (C)2890 (D)3350

<解析>

$$[60, 72]=360, 360 \times 5=1800, 360 \times 6=2160, 360 \times 7=2520, 360 \times 8=2880, 360 \times 9=3240$$

$$\therefore \text{學生人數可能為 } 2170, 2530, 2890, 3250 \text{ 人，選 D。}$$

- ( D )8. 精品服飾店週年慶，促銷名牌時尚休閒服，如果一件衣服，以成本加四成當定價售出時，按定價打八折，則老闆可賺480元，求這件衣服的定價是多少元? (A)3200 (B)4000 (C)4800 (D)5600

<解析>

假設衣服成本是 $x$ 元

$$(1+0.4)x \times 0.8 - x = 480 \rightarrow 0.12x = 480, x = 4000$$

$$\text{則定價} = 4000 \times 1.4 = 5600, \text{選 D。}$$

- ( B )9. 最新季節流感A型病毒直徑為60奈米，B型病毒直徑為 $2.1 \times 10^{-6}$ 米，則B型病毒直徑是A型病毒直徑的幾倍? (A)30 (B)35 (C)40 (D)45

<解析>

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$$

$$\therefore \frac{2.1 \times 10^{-6}}{60 \times 10^{-9}} = \frac{2.1 \times 10^3}{60} = \frac{2100}{60} = 35, \text{選 B。}$$

( C )10. 若 $(x^3-5x^2+2)+(ax^3+bx^2+x)=-x^2+x+c$ ，求  $a \times b \times c = ?$  (A)8 (B)9 (C)-8 (D)-9

<解析>

$$x^3-5x^2+2+ax^3+bx^2+x=-x^2+x+c$$

$$ax^3+bx^2-c=-x^2+x-x^3+5x^2-2-x$$

$$ax^3+bx^2-c=-x^3+4x^2-2$$

$\therefore a=-1, b=4, c=2$ ，則  $a \times b \times c = -8$ ，選 C。

( D )11.  $\triangle ABC$  的三邊長  $\sqrt{13}\text{cm}$ 、 $\sqrt{52}\text{cm}$ 、 $\sqrt{65}\text{cm}$ ，求其面積是多少平方公分? (A) $4\sqrt{2}$   
(B) $3\sqrt{13}$  (C)11 (D)13

<解析>

$$\sqrt{13} = \sqrt{3^2+2^2}$$

$$\sqrt{52} = \sqrt{6^2+4^2}$$

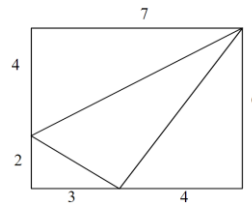
$$\sqrt{65} = \sqrt{7^2+4^2}$$

$\therefore \triangle ABC = 7 \times 6 - (3 \times 2 + 4 \times 6 + 4 \times 7) \div 2 = 42 - 29 = 13$ ，選 D。

<另解>

$\because (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{52})^2 = (\sqrt{65})^2$ ， $\triangle ABC$  為直角三角形

$$\therefore \text{面積} = \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{52}}{2} = 13$$



( C )12. 若  $9x^2+16y^2+25z^2-36x+64y-150z+325=0$ ，求  $xyz = ?$  (A)-8 (B)-6 (C)-12 (D)-16

<解析>

$$9x^2-36x+36+16y^2+64y+64+25z^2-150z+225=0$$

$$(3x-6)^2+(4y+8)^2+(5z-15)^2=0$$

$\therefore x=2, y=-2, z=3$ ，則  $xyz = -12$ ，選 C。

( C )13. Andy goes for a morning run at 6am. Amy sets off from the same spot at 7am to chase (追趕) Andy. If Andy runs 2 kilometers per hour, Amy wants to catch Andy before 9 am. What is the minimum speed of Amy in kilometers per hour? (A)2 (B)2.5 (C)3 (D)4

<解析>

假設 Amy 每小時  $x$  公里，則每小時追上  $(x-2)$  公里

一開始的距離  $= 2 \times (7-6) = 2$  公里

$$\therefore (9-7) \times (x-2) \geq 2 \rightarrow 2x-4 \geq 2, x \geq 3$$

Amy 至少要每小時 3 公里，才能追上 Andy，選 C。

- ( C ) 14. 某國中舉辦數學競賽，及格者的平均為 65 分，不及格者的平均為 45 分，全體的平均為 49 分，請問及格者人數占全體人數的百分比是多少？(A)16% (B)18% (C)20% (D)22%

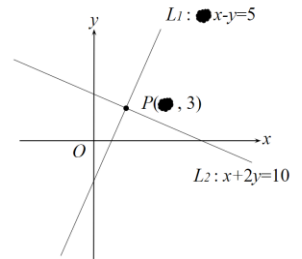
<解析>

假設及格者有  $x$  人，不及格者有  $y$  人

$$65x+45y=49(x+y) \rightarrow 16x=4y, 4x=y$$

$$\therefore \frac{x}{x+y} = \frac{x}{x+4x} = \frac{1}{5} = 20\%, \text{ 選 C。}$$

- ( A ) 15. 如圖，蘇菲發現數學練習簿上的坐標平面中的直線  $L_1$  的  $x$  係數，及兩直線交點  $P$  的橫坐標被汗漬弄髒了，請你幫蘇菲找出  $L_1$  的  $x$  係數是多少？(A)2 (B)3 (C)4 (D)5



<解析>

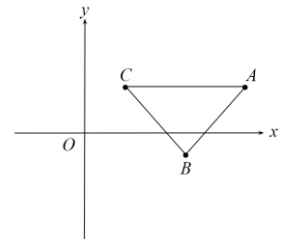
將  $y=3$  代入  $x+2y=10$

$$\therefore x=4, \text{ 則 } P(4, 3)$$

$P$  點在直線  $L_1$  上

$$4 \times \square - 3 = 5, \square = 2, x \text{ 係數} = 2, \text{ 選 A。}$$

- ( B ) 16. 如右圖， $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，且三角形面積為 12 平方單位，若  $A$ 、 $C$  的坐標分別為  $(10, 3)$ 、 $(4, 3)$ ，則  $B$  點坐標是多少？(A)  $(6, -1)$  (B)  $(7, -1)$  (C)  $(6, -2)$  (D)  $(7, -2)$



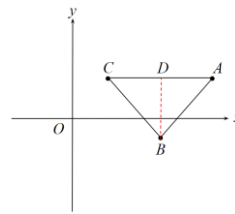
<解析>

$$\overline{AC} = 10 - 4 = 6$$

過  $B$  點作  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$  於  $D$  點  $\rightarrow \overline{BD} = 12 \times 2 \div 6 = 4$

$$D\left(\frac{10+4}{2}, \frac{3+3}{2}\right) = D(7, 3)$$

$$\therefore B(7, 3-4) = B(7, -1), \text{ 選 B。}$$



- ( C ) 17. 計算  $\frac{2019^3 + 7 \times 2019^2 + 4 \times 6057}{2019^2 + 6057} = ?$  (A)2021 (B)2022 (C)2023 (D)2024

<解析>

令  $x=2019$

$$\text{原式} = \frac{x^3 + 7x^2 + 4 \times 3x}{x^2 + 3x} = \frac{x^3 + 7x^2 + 12x}{x^2 + 3x} = \frac{x(x+3)(x+4)}{x(x+3)} = x+4 = 2023, \text{ 選 C。}$$

- ( A ) 18. 矩形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AD} = 10$ ，今將其沿著  $\overline{AE}$  摺疊，使  $D$  落在  $\overline{BC}$  上一點  $F$ ，試求  $\overline{AE} = ?$  (A)  $5\sqrt{5}$  (B)  $4\sqrt{6}$  (C)12 (D)  $3\sqrt{10}$

<解析>

假設  $\overline{DE} = x$ ， $\overline{CE} = 8 - x$

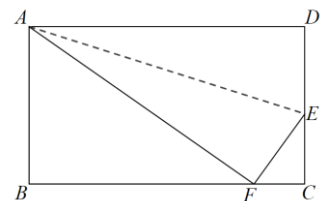
$\triangle ABF$  中， $\overline{AF} = \overline{AD} = 10$

$$\overline{BF} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \rightarrow \overline{CF} = \overline{BC} - \overline{BF} = 10 - 6 = 4$$

$\triangle CEF$  中， $\overline{EF} = \overline{DE} = x$

$$\therefore x^2 = (8-x)^2 + 4^2, x=5$$

$$\therefore \overline{AE} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}, \text{ 選 A。}$$



( C )19. A sequence is 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, ..... What is the sum from the 2000<sup>th</sup> number to 2023<sup>th</sup> number in this sequence? (A)886 (B)957 (C)963 (D)974

<解析>

$$1+2+3+\dots+n=\frac{1}{2}(n+1)n \doteq 2000, (n+1)n \doteq 4000$$

$$\text{當 } n=63, \frac{1}{2}(n+1)n=\frac{1}{2}\times 64\times 63=2016$$

∴ 第 2000 個數=63-16=47, 第 2023 個數=7

$$(47+48+\dots+63)+(1+2+\dots+7)=\frac{(47+63)\times 17}{2}+\frac{(1+7)\times 7}{2}=963$$

, 選 C。

( C )20.  $3^{48} - 1$  is divisible by two integers between 20 and 30. What is the sum of these two integers? (A)50 (B)52 (C)54 (D)56

<解析>

$$3^{48}-1=(3^3)^{16}-1=27^{16}-1$$

$$27^{16}-1=(27^8+1)(27^8-1)$$

$$27^8-1=(27^4+1)(27^4-1)$$

$$27^4-1=(27^2+1)(27^2-1)$$

$$27^2-1=(27+1)(27-1)=28\times 26$$

所以可以被 28 和 26 整除, 則  $28+26=54$ , 選 C。

( B )21. 一把鑰匙開一把鎖, 現在有不同的 12 把鎖, 但它們各自的鑰匙全部放亂了, 我們最多需要試開多少次就可以確保把它們重新配對好? (A)55 (B)66 (C)110 (D)132

<解析>

$$11+10+9+\dots+1=(11+1)\times 11\div 2=66(\text{次})$$

選 B。

( D )22. 右表中 16 個數:

①任找一個數字圈起來, 再把圈起來的數字所在的行、列其他的數字打×。②剩下 9 個數字中, 任找一個數字圈起來, 再把圈起來的數字所在的行、列其他的數字打×。③剩下 4 個數字中, 任找一個數字圈起來, 再把圈起來的數字所在的行、列其他的數字打×。④最後剩下 1 個數字圈起來。

圈起來 4 個數字相加的和是固定的, 請問下列何者錯誤? (A) $m=3$  (B) $r=7$

(C) $w=10$  (D) $p=10$

<解析>

$$\text{和}=a+b+c+d+x+y+z$$

$$m=1+(12-10)=3; v=3+(15-12)=6$$

$$r=6+(16-15)=7; w=5+(15-10)=10$$

$$p=4+(15-10)=9$$

∴ 選 D。

$a+z$	$a+y$	$a+x$	$a$
$b+z$	$b+y$	$b+x$	$b$
$c+z$	$c+y$	$c+x$	$c$
$d+z$	$d+y$	$d+x$	$d$

$r$	$v$	$m$	1
$t$	$w$	$n$	5
$s$	$p$	$q$	4
16	15	12	10



二、 計算題(25分/25分，共50分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. 若 $\alpha x^3 + \beta x^2 - 47x - 15$ 能分解出 $3x+1$ 與 $2x-3$ 之因式，求出 $\alpha$ 、 $\beta$ 及第3個因式 $ax+b$ 。

<解析>

$$(3x+1)(2x-3)=6x^2-7x-3$$

$$\text{常數項} = (-3) \times b = -15 \rightarrow b=5$$

$$\begin{aligned}(6x^2-7x-3)(ax+5) &= 6ax^3-7ax^2-3ax+30x^2-35x-15 \\ &= 6ax^3+(30-7a)x^2-(3a+35)x-15\end{aligned}$$

$$\therefore 3a+35=47, a=4$$

$$\therefore \beta=30-7 \times 4=2, \alpha=6 \times 4=24, \text{因式}=4x+5$$

$$\text{答: } \beta=2, \alpha=24, \text{因式}=4x+5$$

2. 民國年數加上1911就是西元年數，例如：民國74年，西元 $74+1911=1985$ 年，今年是2022年，請你用「你的年齡 $x$ 歲，你的手機號碼最後兩碼是 $y$ 」，求出下列 $\square$ 是多少？

①想一下你(妳)的手機號碼的最後兩位數字

②把這個數字乘以8

③然後加上16，再乘以125

④得到的積數除以10

⑤把得到的數加上 $\square$

⑥最後一個步驟，用這個和數減去你(妳)出生的西元年，現在你(妳)看到的四位數的數字，前兩位數是你(妳)的手機號碼最後兩位數，接下來就是你(妳)的實際年齡。

<解析>

年齡 $x$ 歲 $\rightarrow$ 出生 $(2022-x)$ 年

$$(8y+16) \times 125 \div 10 + \square - (2022-x) = 100y+x$$

$$100y+200+\square-2022+x=100y+x$$

$$200+\square-2022=0$$

$$\square=2022-200=1822$$

$$\text{答: } \square=1822$$