



# 第十九屆 IMC 國際數學競賽初賽(台灣)

The 19th IMC International Mathematics Preliminary Contest (Taiwan)

## 國中一年級(初賽)試卷

考試時間: 60 分鐘 卷面總分: 300 分 得分: \_\_\_\_\_

### 一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

- ( D ) 1. 若外太空每日約有  $2.6 \times 10^7$  磅的塵埃落在地球上，則一年(365 天計算)約有多少磅的塵埃落在地球上?(以科學記號回答) (A)  $9.49 \times 10^6$  (B)  $9.49 \times 10^7$  (C)  $9.49 \times 10^8$  (D)  $9.49 \times 10^9$

<解析>

$$2.6 \times 10^7 \times 365 = 949 \times 10^7 = 9.49 \times 10^9$$

選 D。

- ( A ) 2. 有一個捐款活動，陳先生每捐 100 元，王先生就捐 150 元，若他們共捐了 15000 元，則王先生捐了多少元? (A) 9000 (B) 8000 (C) 7000 (D) 9600

<解析>

捐贈比例 → 陳先生: 王先生 = 100:150 = 2:3

$15000 \div (2+3) \times 3 = 9000$ ，選 A。

- ( C ) 3. Joyce wanted to buy grapes and went to four fruit stores.

Store Name	KiKi	NiNi	BoBo	CoCo
Weight(g)	300	600	1000	1500
Price(dollars)	50	90	140	230

The prices for the same grapes they sell are shown in the table. Which one has the cheapest grapes? (A) KiKi (B) NiNi (C) BoBo (D) CoCo

<解析>

KiKi  $300:50=3000:500$

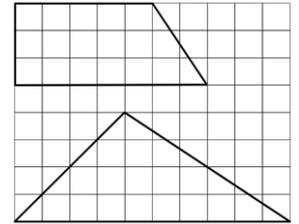
NiNi  $600:90=3000:450$

BoBo  $1000:140=3000:420$

CoCo  $1500:230=3000:460$

故相同重量的葡萄，BoBo 賣得最便宜，選 C。

- ( B ) 4. 如右圖，若三角形的面積為 100 平方公分，求梯形的面積是多少平方公分? (A)100 (B)90 (C)80 (D)95



<解析>

$$100 \times 2 = 200$$

$$200 \div (4 \times 10) = 5$$

$$(5+7) \times 3 \div 2 \times 5 = 90, \text{ 選 B。}$$

- ( C ) 5. 觀察規律，計算  $14-15+16-17+18-\dots+2022$  的值為何? (A)1014 (B)1016 (C)1018 (D)1020

<解析>

$$14-15=-1$$

$$2021-14+1=2008, 2008 \div 2=1004$$

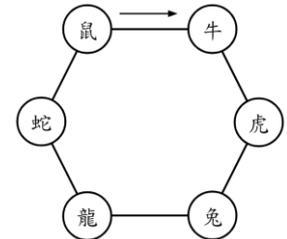
$$(-1) \times 1004 + 2022 = 1018, \text{ 選 C。}$$

- ( D ) 6. 有一個倉庫有 5 個特大號盒子，每個特大號盒子中有 5 個大號盒子，每個大號盒子中有 5 個中號盒子，每個中號盒子中有 5 個小號盒子，則這間倉庫共有多少個盒子? (A)125 (B)20 (C)625 (D)780

<解析>

$$5+5 \times 5+5 \times 5 \times 5+5 \times 5 \times 5 \times 5=5+25+125+625=780, \text{ 選 D。}$$

- ( ) 7. 如圖，有一顆棋子放在圖中的鼠位上，以順時針方向，第一次跳一步到牛位，第二次跳兩步到兔位，第三次跳三步又跳到鼠位，第四次跳四步……持續下去，請問第 2022 次跳 2022 步就跳到了\_\_\_\_\_上。(A)鼠位 (B)牛位 (C)蛇位 (D)虎位



<解析>

$$1+2+3+\dots+2022=(1+2022) \times 2022 \div 2=2023 \times 1011$$

$$2023 \times 1011 \div 6=340875 \dots 3, \text{ 餘數}=3$$

所以會跳回到兔位。(本題送分)

- ( C ) 8. 郭老師買了 55 本相同價錢的<小品詩集>送給畢業班學生，發票因為磨損而印出  $9x3y$  元， $x+y$  之值可能是多少? (A)8 (B)11 (C)12 (D)15

<解析>

$$55=5 \times 11 \rightarrow y=5 \text{ 或 } y=0$$

檢驗 11 的倍數

$$\text{當 } y=0, 9+3-(x+0)=11, x=1$$

$$\text{當 } y=5, 9+3-(x+5)=0, x=7$$

故  $x+y=1+0=1$  或  $x+y=7+5=12$ ，選 C。

- ( A )9. 阿德、小櫻、俊瑋、小昌、凱倫五人參加校內象棋大賽，若每兩個人都必須比賽一場，且每場都必須分出勝負，即沒有和局的結果，將勝一場記為“+1”，負一場記為“-1”，比賽結果如下表所示。

參賽者	阿德	小櫻	俊瑋	小昌	凱倫
勝	3	?	4	2	1
負	-1	?	0	-2	-3

請求出小櫻的勝負場數為何? (A)0勝4負 (B)1勝3負 (C)2勝2負 (D)3勝1負

<解析>

共比賽:  $5 \times 4 \div 2 = 10$  場

勝場 =  $10 - (3 + 4 + 2 + 1) = 0$

敗場 =  $10 - (1 + 2 + 3) = 4$

∴小櫻的勝負場次是 0 勝 4 負，選 A。

- ( A )10. 計算  $(2-1\frac{1}{2}) \div (2-1\frac{1}{3}) \div (2-1\frac{1}{4}) \div (2-1\frac{1}{5}) \div \dots \div (2-1\frac{1}{99}) \div (2-1\frac{1}{100}) = ?$  (A)25 (B)35  
(C)40 (D)55

<解析>

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{99}{98} \times \frac{100}{99} = \frac{100}{2 \times 2} = 25$$

選 A。

- ( C )11. 請計算  $\frac{318^4}{159^4} + \frac{1407^3}{469^3} - \frac{4408^2}{1102^2} = ?$  (A)18 (B)-18 (C)27 (D)-27

<解析>

$$\text{原式} = \left(\frac{318}{159}\right)^4 + \left(\frac{1407}{469}\right)^3 - \left(\frac{4408}{1102}\right)^2 = 2^4 + 3^3 - 4^2 = 16 + 27 - 16 = 27, \text{選 C。}$$

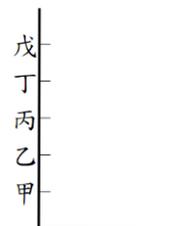
- ( A )12. 某艘潛水艇在水面下 185 公尺處發射第一枚飛彈，3 秒後擊中位於水面下方 14 公尺處的敵軍潛水艇。稍後，此潛水艇在同地發射第二枚飛彈，18 秒後擊中敵軍戰鬥機，則敵軍戰鬥機是在水面上多少公尺處被擊落的? (假設飛彈在水中及空氣中的阻力不計) (A)841 (B)842 (C)843 (D)844

<解析>

$(185-14) \div 3 = 57 \dots$  飛彈每秒向上 57 公尺

$57 \times 18 = 1026$

$1026 - 185 = 841$ ，選 A。



- ( C )13. 有一容器可以裝 8 碗水或 16 杯水，若先裝 2 碗水，再注入 6 杯水，則水面應該上升至哪兩條線之間? (A) 甲、乙 (B) 乙、丙 (C) 丙、丁 (D) 丁、戊

<解析>

假設此容器容量=48

一碗水=48÷8=6，一杯水=48÷16=3

$$6 \times 2 + 3 \times 6 = 30$$

$48:6=30:\square$ ， $\square=\frac{180}{48}=\frac{30}{8}=3\frac{6}{8}$  → 丙、丁之間，選 C。

- ( B )14. The distance between Chloe's house and her grandmother's house is 75 kilometers. She leaves from home at 11 am and arrives at her grandmother's house at 2 pm. How many kilometers per hour does she ride? (A)20 (B)25 (C)30 (D)35

<解析>

$$14-11=3$$

$$75 \div 3 = 25$$

選 B。

- ( C )15. 今有 250 題數學題目，威廉星期一到星期五每天做 10 題，星期六做 15 題，星期天做 5 題，若威廉由星期一開始做，請問到星期幾才能做完? (A)星期二 (B)星期三 (C)星期四 (D)星期六

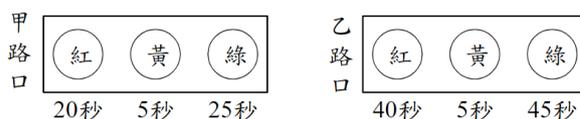
<解析>

$$10 \times 5 + 15 + 5 = 70$$

$$250 \div 70 = 3 \dots 40$$

$40 \div 10 = 4$  → 星期四才完成，選 C。

- ( B )16. 若博愛路上有甲、乙兩個十字路口，兩路口的交通號誌燈閃爍秒數如下所示。



假設在中午 12 點整，甲、乙兩路口的交通號誌燈都恰好轉為紅燈，請問下次又同時轉為紅燈是在幾秒? (A)855 (B)450 (C)225 (D)40

<解析>

$$\text{甲: } 20+5+25=50$$

$$\text{乙: } 40+5+45=90$$

$[50, 90]=450$ ，選 B。

( A )17.



上圖為一皮帶，阿德之前的腰圍是 96 公分，皮帶扣至己孔，現在減肥後，腰圍變成 88 公分，請問皮帶可以扣至哪一個孔? (A)甲 (B)乙 (C)丙 (D)丁

<解析>

$$96-88=8$$

$$8 \div 1.6=5$$

∴可以扣到甲，選 A。

( C )18. 萱萱一家四人去搭乘纜車，纜車的搭乘規定如圖。當某臺纜車開放搭乘時，萱萱算了一下，排在他們家前面還有 40 位乘客，若萱萱家四人想搭乘同一臺纜車，請問他們一家人最多需等多少時間才能搭乘到纜車? (A)3 分鐘 (B)3 分 30 秒 (C)4 分鐘 (D)4 分 30 秒

<解析>

每臺都搭乘 5 人，萱萱一家四人就無法搭乘，會由後面的人補滿 8 人

$$40 \div 5=8(\text{次})$$

$$30 \times 8=240 \text{ 秒}=4 \text{ 分鐘。}$$

( B )19. 有三個自然數  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，若  $[a, b, c]=2023$ ， $(a, b, c)=17$ ，則  $a+b+c$  的最小值是多少? (A)375 (B)425 (C)395 (D)455

<解析>

$$\text{假設 } a=17x, b=17y, c=17z$$

$$[17x, 17y, 17z]=17xyz=2023, xyz=\frac{2023}{17}=119$$

$$\therefore (x, y, z)=(1, 1, 119) \text{ 或 } (1, 7, 17)$$

$$\text{最小值}=17+17 \times 7+17 \times 17=17+119+289=425, \text{ 選 B。}$$

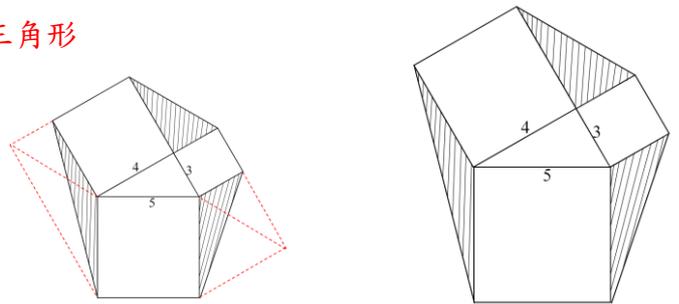
( A )20. The side lengths of the three squares are 3 cm, 4 cm and 5 cm respectively. What is the area of the slashed part in square centimeters? (A)18 (B)20 (C)22 (D)24

<解析>

畫輔助線，經面積平移後，都是兩股 4 和 3 的直角三角形

$$\text{斜線面積}=4 \times 3 \div 2 \times 3=18$$

選 A。



纜車搭乘規定:

1. 每臺纜車搭乘的人數為 6~8 人。

2. 固定每 30 秒會有一臺纜車開放搭乘。

3. 乘客請排隊依序上車，但若纜車未滿 8 人，開放願意補足 8 人之乘客優先上車。

- ( B )21. 一把鑰匙開一把鎖，現在有不同的 12 把鎖，但它們各自的鑰匙全部放亂了，我們最多需要試開多少次就可以確保把它們重新配對好? (A)55 (B)66 (C)110 (D)132

$$11+10+9+\dots+1=(11+1)\times 11\div 2=66(\text{次})$$

選 B

- ( A )22. 通訊公司員工有 3 天連假，員工可從 12 月 17 日(六)到 12 月 24 日(六)，這 8 天中連續 3 天放假，用抽籤的方式來決定，員工云蓉抽中星期六或星期日的機率是多少? (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{2}{7}$

<解析>

(六、日、一)，(日、一、二)，(一、二、三)，(二、三、四)，(三、四、五)，(四、五、六)

共有 6 種

其中星期六或星期日有 3 種，所以機率  $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ，選 A。

- ( D )23. 右表中 16 個數:

①任找一個數字圈起來，再把圈起來的數字所在的行、列其他的數字打×。②剩下 9 個數字中，任找一個數字圈起來，再把圈起來的數字所在的行、列其他的數字打×。③剩下 4 個數字中，任找一個數字圈起來，再把圈起來的數字所在的行、列其他的數字打×。④最後剩下 1 個數字圈起來。圈起來 4 個數字相加的和是固定的，請問下列何者錯誤? (A) $m=3$  (B) $r=7$  (C) $w=10$  (D) $p=10$

$r$	$v$	$m$	1
$t$	$w$	$n$	5
$s$	$p$	$q$	4
16	15	12	10

<解析>

$$\text{和} = a+b+c+d+x+y+z$$

$$m=1+(12-10)=3; v=3+(15-12)=6$$

$$r=6+(16-15)=7; w=5+(15-10)=10$$

$$p=4+(15-10)=9$$

∴選 D。

$a+z$	$a+y$	$a+x$	$a$
$b+z$	$b+y$	$b+x$	$b$
$c+z$	$c+y$	$c+x$	$c$
$d+z$	$d+y$	$d+x$	$d$

- ( C )24. The right column is the division of positive integers, the remainder is 7, and the number in the bold box is not 0. Find  $a+b-c-d=?$  (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

因為餘數是 7，除數  $a=8$  或  $a=9$

$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ \square \square \square \mathbf{b} \\ \square \\ \hline \square \mathbf{d} \\ \mathbf{c} \square \\ \hline \square \square \\ \square \\ \hline 7 \end{array}$$

當  $a=8$

當  $a=9$ (不合)

$$\begin{array}{r}
 \boxed{1} \boxed{2} \boxed{1} \\
 \hline
 8 \overline{) 9 \boxed{7} \boxed{5}} \\
 \underline{8} \phantom{0} \\
 \boxed{1} \boxed{7} \\
 \underline{\boxed{1} \boxed{6}} \\
 \phantom{\boxed{1}} \boxed{1} \boxed{5} \\
 \underline{\phantom{\boxed{1}} \phantom{\boxed{1}} \boxed{8}} \\
 \phantom{\phantom{\boxed{1}}} \phantom{\phantom{\boxed{1}}} 7
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \boxed{1} \phantom{\boxed{0}} \boxed{1} \\
 \hline
 9 \overline{) 9 \phantom{\boxed{0}} \boxed{6}} \\
 \underline{9} \phantom{0} \\
 \phantom{0} \phantom{\boxed{0}} \\
 \phantom{\boxed{0}} \phantom{\boxed{0}} \\
 \phantom{\phantom{\boxed{0}}} \boxed{1} \boxed{6} \\
 \underline{\phantom{\phantom{\boxed{0}}} \phantom{\phantom{\boxed{0}}} \boxed{9}} \\
 \phantom{\phantom{\phantom{\boxed{0}}}} \phantom{\phantom{\phantom{\boxed{0}}}} 7
 \end{array}$$

∴  $a=8, b=5, c=1, d=7$ , 則  $8+5-1-7=5$ , 選 C。

( B ) 25.  $n!$  表示  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$  (例如:  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ )，如果計算  $15! = 130767a368000$ ，則  $a=?$  (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

15! 的質數有 2、3、5、7、11、13

∴ 130767 a368000 符合 11 的倍數

$(3+7+7+3+8+0)-(1+0+6+a+6+0+0)$  是 0 或 11 的倍數

$28-13-a=0$ ,  $a=15$ (不合)

$28-13-a=11$ ,  $a=4$ , 選 B。

-----  
<另解>

15! 是 9 的倍數

$1+3+7+6+7+a+3+6+8$  是 9 的倍數

$41+a=45$ ,  $a=4$

## 二、 計算題(25 分/25 分，共 50 分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. 右圖是某超商促銷活動的內容，今婷婷到該超商拿相差 2 元的 2 種飯糰各 1 個結帳時，店員說：「要不要多買 2 瓶指定飲料？搭配促銷活動後 2 組優惠價的金額，只比你買 2 個飯糰的金額多 30 元。」若婷婷只多買 1 瓶指定飲料，且店員會以對消費者最便宜的方式結帳，則：



(1) 原本買的飯糰比較便宜的那一個是多少元？(2) 與原本只買 2 個飯糰相比，她要多付多少元？

<解析>

(1)  $39 \times 2 - 30 = 48$ ..... 原來兩個飯糰的價錢

$(48-2) \div 2 = 23$ ..... 便宜飯糰的價錢

(2)  $39 + 23 = 62$

$62 - 48 = 14$

答: (1) 23 元 (2) 多付 14 元。

2. 民國年數加上 1911 就是西元年數，例如：民國 74 年，西元  $74+1911=1985$  年，今年是 2022 年，請你用「你的年齡  $x$  歲表示西元  $(2022-x)$  年出生，你的手機號碼最後兩碼是  $y$ 」，求出下列  $\square$  是多少？

① 想一下你(妳)的手機號碼的最後兩位數字

② 把這個數字乘以 8

③ 然後加上 16，再乘以 125

④ 得到的積數除以 10

⑤ 把得到的數加上  $\square$

⑥ 最後一個步驟，用這個和數減去你(妳)出生的西元年，現在你(妳)看到的四位數的數字，前兩位數是你(妳)的手機號碼最後兩位數，接下來就是你(妳)的實際年齡。

<解析>

年齡  $x$  歲  $\rightarrow$  出生  $(2022-x)$  年

$$(8y+16) \times 125 \div 10 + \square - (2022-x) = 100y+x$$

$$100y+200+\square-2022+x=100y+x$$

$$200+\square-2022=0$$

$$\square=2022-200=1822$$

答： $\square=1822$