第十九屆 IMC 國際數學競賽初賽(台灣)

The 19th IMC International Mathematics Preliminary Contest (Taiwan)

高中二年級(初賽)試卷

考試時間: 60 分鐘　　卷面總分:300 分　　得分:________________

一、 選擇題(每題 10 分，共 250 分)

(B)1. If $f(x)=|x-2|+|x+5|$, then the minimum of $f(x)$ is_______. (A)3 (B)7 (C)10 (D)12

<解析>

①$x<-5$，$f(x)=-(x-2)-(x+5)=-2x+3>7$

②$-5<x\le2$，$f(x)=-(x-2)+(x+5)=7$

③$2<x$，$f(x)=(x-2)+(x+5)=2x+3>7$

故最小值=7，選 B。

(B)2. 已知$270°<\theta<360°$且$\cos\theta=\frac{1}{3}$，求$\sin2\theta$=? (A) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (B) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (D) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

<解析>

$\sin\theta=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{-2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{-4\sqrt{2}}{9}$

選 B。

(A)3. 觀察右圖 3x3 與 4x4 方格中的數字規律，如果在 12×12 的方格中，依右圖的規律填入數字，則所填入的 144 個數字總和是多少? (A)650 (B)750 (C)646 (D)746

1	2	3
1	2	2
1	1	1

1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

<解析>

將方格轉換成共 12 層三角形

$$\begin{array}{ccccc|l} & & 1 & & & \rightarrow 1^2 \\ & 1 & 2 & 1 & & \rightarrow 2^2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \rightarrow 3^2 \\ .. & .. & .. & .. & .. & \end{array}$$

∴數字和$=1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+12^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{6}\times12\times13\times25=650$，選 A。

(C)4. 假設 x、y 均為正實數，則$(x+\frac{1}{y})(\frac{4}{x}+y)$的最小值為多少? (A)4 (B)6 (C)9 (D)12

<解析>

原式$=4+xy+\frac{4}{xy}+1=xy+\frac{4}{xy}+5$，且$x>0$，$y>0$，故$xy>0$

利用算幾不等式$\frac{xy+\frac{4}{xy}}{2}\geq\sqrt{xy\cdot\frac{4}{xy}}\rightarrow\frac{xy+\frac{4}{xy}}{2}\geq2$，$xy+\frac{4}{xy}\geq4$

故$xy+\frac{4}{xy}+5\geq4+5=9$，最小值是 9，選 C。

(D)5. 已知$\log6≒0.7782$，試求$10^{0.7782}=$? (A)7.7 (B)8 (C)7 (D)6

<解析>

令$10^{0.7782}=a$

$\log10^{0.7782}=\log a\rightarrow0.7782\times\log10=\log a$，$\log a=0.7782$，$a=6$

選 D。

(A)6. 設$f(x)=x^2-2ax+a$，若任意實數 x，恆使$f(x)>-2$成立，求實數 a 的範圍為?
(A)$-1<a<2$ (B)$a>2$ (C)$a<-1$ (D)$a>2$ 或 $a<-1$

<解析>

當$x^2-2ax+a>-2$，$x^2-2ax+a+2>0$

令$y=x^2-2ax+(a+2)>0$恆真

$\therefore$判別式$D=(-2a)^2-4(a+2)<0$

$\therefore a^2-a-2<0\rightarrow(a-2)(a+1)<0$，$-1<a<2$

選 A。

(D)7. 設 θ 為銳角，且$\cos\theta+2\sin\theta=2$，求$\sin\theta+\cos\theta=$? (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{7}{5}$

<解析>

$\cos\theta=2-2\sin\theta\rightarrow\cos^2\theta=4-8\sin\theta+4\sin^2\theta$

$1-\sin^2\theta=4-8\sin\theta+4\sin^2\theta$

$\therefore5\sin^2\theta-8\sin\theta+3=0\rightarrow(5\sin\theta-3)(\sin\theta-1)=0$

則$\sin\theta=\frac{3}{5}$ 或$\sin\theta=1$（不合）

$\sin\theta+\cos\theta=(\cos\theta+2\sin\theta)-\sin\theta=2-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$，選 D。

(C)8. 設 $f(x)$為多項式，若以$(x+2)(x^2-x-1)$除之，所得到之餘式為$2x^2-6x+5$，則 $f(x)$除以(x^2-x-1)之餘式為? (A) $2x+7$ (B) $-2x+7$ (C) $-4x+7$ (D) $4x-7$

<解析>

令$f(x)=(x+2)(x^2-x-1)\cdot q(x)+2x^2-6x+5$

$\rightarrow$ $f(x)=(x+2)(x^2-x-1)\cdot q(x)+2(x^2-x-1)-4x+7$

$=(x^2-x-1)[(x+2)\cdot q(x)+2]-4x+7$

$\therefore$餘式$=-4x+7$，選 C。

(A)9. 設$A(6, 2)$和$B(-1, 6)$，C 為 x 軸上一點，若∠ACB=90°，則 C 點的坐標為何?
(A) (2, 0)、(3, 0) (B) (-2, 0)、(3, 0) (C) (2, 0)、(-3, 0) (D) (-2, 0)、(-3, 0)

<解析>

假設 $C(x, 0)$

$m_{AC}=\frac{2-0}{6-x}$，$m_{BC}=\frac{6-0}{-1-x}$ 且∠ACB=90°

$\therefore m_{AC}\cdot m_{BC}=-1$

$\therefore \frac{2-0}{6-x}\times\frac{6-0}{-1-x}=-1$，$12=-1(6-x)(-1-x)$，$12=-x^2+5x+6$，$x^2-5x+6=0\rightarrow(x-3)(x-2)=0$

$\therefore x=3$ 或 $x=2$

則 C 點坐標(3,0) (2,0)，選 A。

(B)10. In a bacterial culture experiment, the original number of bacteria is n_0. After x days, the bacterial count becomes $n_0\cdot a^x$. It is known that the number of bacteria after 2 days is 3×10^6 and after 5 days the number of bacteria is 2.4×10^7, which of the following is wrong? (A) $a=2$ (B) $n_0=2.5\times10^5$ (C) After 7 days the number of bacteria is 9.6×10^7. (D) It takes 9 days for the bacterial count to reach 3.84×10^8.

<解析>

令$f(x)=n_0\cdot a^x$

$f(2)=n_0\cdot a^2=3\times10^6$；$f(5)=n_0\cdot a^5=2.4\times10^7$

$\therefore \frac{f(5)}{f(2)}=a^3=8\rightarrow a=2$ 代入 $n_0\cdot 2^2=3\times10^6$，$n_0=7.5\times10^5$

$f(7)=7.5\times10^5\times2^7=9.6\times10^7$；$f(9)=7.5\times10^5\times2^9=3.84\times10^8$，選 B。

(A)11. 已知等比數列$\langle a_n\rangle$的每項均為實數，公比為 r，且滿足$3a_1+2a_3=3$，$a_5+5a_3=6$，則r^2=? (A)2 (B)3 (C)4 (D)9

<解析>

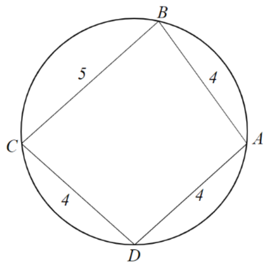
$3a_1+2a_3=3a_1+2a_1\cdot r^2=a_1(3+2r^2)=3\cdots$①

$a_5+5a_3=a_1\cdot r^4+5a_1\cdot r^2=a_1r^2(r^2+5)=6\cdots$②

則$\frac{①}{②}=\frac{3+2r^2}{r^2(r^2+5)}=\frac{1}{2}\rightarrow r^4+r^2-6=0$，$(r^2-2)(r^2+3)=0$，$r^2=2$或$r^2=-3$（不合）

選 A。

(D)12. 右圖所示，設 $ABCD$ 為圓內接四邊形，已知$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=4$，$\overline{DA}=4$，則對角線$\overline{AC}$=? (A)3 (B)4 (C)5 (D)6



<解析>

圓內接四邊形➔∠D=180°-∠B

$\therefore \cos D=-\cos B$

△ABC 與△ADC 中

利用餘弦定理

$$\frac{4^2+4^2-\overline{AC}^2}{2\times4\times4}=-\frac{4^2+5^2-\overline{AC}^2}{2\times4\times5}$$

$\overline{AC}^2=36$，$\overline{AC}=6$，選 D。

(C)13. 已知 a、b、c 為正整數，若 $\frac{a}{\log_2 120}+\frac{b}{\log_3 120}+\frac{c}{\log_5 120}=1$，則 $a+b+c=?$

(A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

$1=\frac{a}{\log_2 120}+\frac{b}{\log_3 120}+\frac{c}{\log_5 120}$

$\rightarrow 1=a\times\log_{120}2+b\times\log_{120}3+c\times\log_{120}5$

$\rightarrow 1=\log_{120}(2^a\cdot 3^b\cdot 5^c)$

$\rightarrow 2^a\cdot 3^b\cdot 5^c=120=2^3\times 3\times 5$

$\therefore a=3$，$b=1$，$c=1$

則 $a+b+c=3+1+1=5$，選 C。

(C)14. There are 3 black balls and 2 white balls in the box. There is a game where any ball is taken from the box. Assume that every ball has the same chance of being drawn. If you take out a black ball, you can get a bonus of \$50, and if you take out a white ball, you can get a bonus of \$100. What is the expected value of this game bonus? (A) \$50 (B) \$60 (C) \$70 (D) \$80

<解析>

期望值 $E=P(\text{黑球})\times 50+P(\text{白球})\times 100=\frac{3}{5}\times 50+\frac{2}{5}\times 100=70$

選 C。

(A)15. 有 6 男 4 女共 10 名學生擔任本週值日生。老師規定在本週 5 個上課日中，每天 2 名值日生，且至少有 1 名男生。試問本週安排值日生的方式共有多少個?

(A)43200 (B)41600 (C)32400 (D)35400

<解析>

先安排一週男女值日生

星期	一	二	三	四	五
值日生	男	男	男	男	男
	男	女	女	女	女

挑選 2 個男生做為一組，再將剩下的男生和全部的女生做搭配

$C^6_2\times C^5_1\times 4!\times 4!=15\times 5\times 24\times 24=43200$

四女任意排列

四男任意排列

2 男挑選星期一至星期五的任一天

6 個男生先挑 2 位

共有 43200 個，選 A。

(D)16. 一台玩具火車長鳴一次 3 秒，短鳴一次 2 秒，相鄰兩次鳴放間隔為 2 秒，若歷時 23 秒，則共有幾種不同的鳴法? (A)10 (B)9 (C)8 (D)7

<解析>

假設長鳴 x 次，短鳴 y 次，則間隔$(x+y-1)$次

共花費 $3x+2y+2(x+y-1)=23 \Rightarrow 5x+4y=25$，其中 x、y 為非負整數

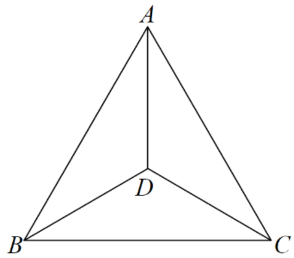
x	5	4	3	2	1	0
y	0	×	×	×	5	×

①長鳴 5 次，短鳴 0 次，方法數有 1 種。

②長鳴 1 次，短鳴 5 次，方法數有$\frac{6!}{1!5!}=6$種。

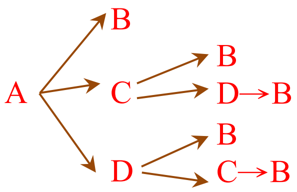
共有 1+6=7 種，選 D。

(B)17. 如圖，從 A 點出發到 B 點結束，走過的地方不能重複(未到達 B 點前，不能再回到 A 點)，則經過 D 點的機率是多少? (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$



<解析>

依樹狀圖



故機率= $\frac{3}{5}$，選 B。

(A)18. 多項式$f(x)=(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+(1-x)^4+.......+(1-x)^{10}$的$x^3$項的係數是多少? (A)-330 (B)330 (C)-320 (D)320

<解析>

$$f(x)=\frac{(1-x)[(1-x)^{10}-1]}{(1-x)-1}=\frac{(1-x)^{11}-(1-x)}{-x}=\frac{(1-x)-(1-x)^{11}}{x}$$

$\therefore x^3$的係數是$-(1-x)^{11}$的展開式中x^4項的係數

$\therefore -C^{11}_4=-330$，選 A。

(B)19. If $x^2-x+1=0$, then $x^{2023}-x^{2022}-x+1=$____. (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

<解析>

$x^2-x+1=0 \Rightarrow x^2=x-1$

$(x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^3+1=0$，$x^3=-1$

$x^{2023}-x^{2022}=x^{2022}(x-1)=x^{2022}\cdot x^2=x^{2024}=(x^3)^{674}\cdot x^2=x^2$

$x^{2023}-x^{2022}-x+1=x^2-x+1=0$

選 B。

(C)20. 當x=$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$和y=$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$，則x^4-y^4=? (A)15$\sqrt{5}$ (B)18$\sqrt{5}$ (C) 21$\sqrt{5}$ (D) 24$\sqrt{5}$

<解析>

x+y=$\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}$=3，xy=$\frac{3+\sqrt{5}}{2}\times\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{9-5}{4}=1$，x-y=$\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=9-2=7$

$\therefore x^4-y^4=7\times3\times\sqrt{5}=21\sqrt{5}$，選 C。

(B)21. 一把鑰匙開一把鎖，現在有不同的 12 把鎖，但它們各自的鑰匙全部放亂了，我們最多需要試開多少次就可以確保把它們重新配對好? (A)55 (B)66 (C)110 (D)132

<解析>

11+10+9+….+1=(11+1)x11÷2=66(次)

選 B。

(D)22. 右表中 16 個數:

①任找一個數字圈起來，再把圈起來的數字所在的行、列其他的數字打×。②剩下 9 個數字中，任找一個數字圈起來，再把圈起來的數字所在的行、列其他的數字打×。③剩下 4 個數字中，任找一個數字圈起來，再把圈起來的數字所在的行、列其他的數字打×。④最後剩下 1 個數字圈起來。圈起來 4 個數字相加的和是固定的，請問下列何者錯誤? (A)m=3 (B)r=7 (C)w=10 (D)p=10

$a+z$	$a+y$	$a+x$	a
$b+z$	$b+y$	$b+x$	b
$c+z$	$c+y$	$c+x$	c
$d+z$	$d+y$	$d+x$	d

r	***v***	***m***	1
t	**w**	***n***	5
s	***p***	***q***	4
16	15	*12*	10

<解析>

和=$a+b+c+d+x+y+z$

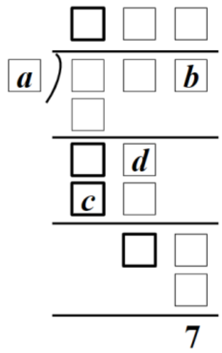
m=1+(12-10)=3；v=3+(15-12)=6

r=6+(16-15)=7；w=5+(15-10)=10

p=4+(15-10)=9

∴選 D。

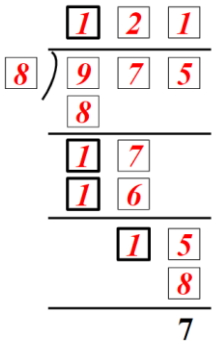
(C)23. The right column is the division of positive integers, the remainder is 7, and the number in the bold box is not 0. Find a+b-c-d=?
(A)3 (B)4 (C)5 (D)6

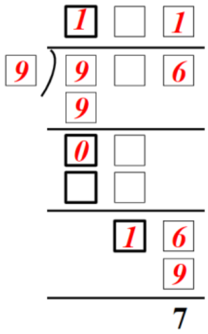


<解析>

因為餘數是 7，除數 a=8 或 a=9

當 a=8　　　　　　　　當 a=9(不合)





∴a=8，b=5，c=1，d=7，則 8+5-1-7=5，選 C。

(A)24. 通訊公司員工有 3 天連假，員工可從 12 月 17 日(六)到 12 月 24 日(六)，這 8 天中連續 3 天放假，用抽籤的方式來決定，員工云萱抽中星期六或星期日的機率是多少? (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{7}$

<解析>

(六、日、一)，(日、一、二)，(一、二、三)，(二、三、四)，(三、四、五)，(四、五、六)

共有 6 種

其中星期六或星期日有 3 種，所以機率=$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，選 A。

(B)25. n!表示 1x2x3x4x……xn (例如:4!=1x2x3x4=24)，如果計算 15!=130767a368000，則 a=? (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

15!的質數有 2、3、5、7、11、13

∴130767 a368000 符合 11 的倍數

(3+7+7+3+8+0)-(1+0+6+a+6+0+0)是 0 或 11 的倍數

28-13-a=0，a=15(不合)

28-13-a=11，a=4，選 B。

<另解>

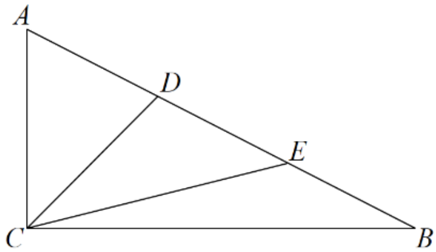
15!是 9 的倍數

1+3+7+6+7+a+3+6+8 是 9 的倍數

41+a=45，a=4

二、 計算題(25 分/25 分，共 50 分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. 如右圖，△ABC 中，∠C=90°，且$\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB}$，已知∠$ACD=\alpha$，∠$DCE=\beta$，∠$ECB=\gamma$，則$\frac{sin\alpha\cdot sin\gamma}{sin\beta}$的值是多少?



<解析>

令$\overline{AC}=b$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CD}=x$，$\overline{CE}=y$

$\frac{1}{2}bx\sin\alpha=\frac{1}{2}xy\sin\beta=\frac{1}{2}ay\sin\gamma=\frac{1}{3}\Delta ABC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}ab=\frac{1}{6}ab$

①$\sin\alpha=\frac{\frac{1}{6}ab}{\frac{1}{2}bx}=\frac{a}{3x}$ ②$\sin\beta=\frac{\frac{1}{6}ab}{\frac{1}{2}xy}=\frac{ab}{3xy}$ ③$\sin\gamma=\frac{\frac{1}{6}ab}{\frac{1}{2}ay}=\frac{b}{3y}$

$\therefore\frac{sin\alpha\cdot sin\gamma}{sin\beta}=\frac{\frac{a}{3x}\cdot\frac{b}{3y}}{\frac{ab}{3xy}}=\frac{1}{3}$

答: $\frac{1}{3}$

2.民國年數加上 1911 就是西元年數，例如:民國 74 年，西元 74+1911=1985 年，今年是 2022 年，年齡是 2022-1985=37 歲，請你用「你的年齡 x 歲，你的手機號碼最後兩碼是 y」，求出下列□是多少?

①想一下你(妳)的手機號碼的最後兩位數字

②把這個數字乘以 8

③然後加上 16，再乘以 125

④得到的積數除以 10

⑤把得到的數加上□

⑥最後一個步驟，用這個和數減去你(妳)出生的西元年，現在你(妳)看到的四位數的數字，前兩位數是你(妳)的手機號碼最後兩位數，接下來就是你(妳)的實際年齡。

<解析>

年齡 x 歲→出生(2022−x)年

$(8y+16)\times125\div10+$□$-(2022-x)=100y+x$

$100y+200+$□$-2022+x=100y+x$

$200+$□$-2022=0$

□$=2022-200=1822$

答:□=1822