



第十九屆 IMC 國際數學競賽初賽(台灣)

The 19th IMC International Mathematics Preliminary Contest (Taiwan)

高中一年級(初賽)試卷

考試時間: 60 分鐘 卷面總分:300 分 得分: _____

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

- (C) 1. 設 $f(x)$ 為多項式，若以 $(x+2)(x^2-x-1)$ 除之，所得到之餘式為 $2x^2-6x+5$ ，則 $f(x)$ 除以 (x^2-x-1) 之餘式為? (A) $2x+7$ (B) $-2x+7$ (C) $-4x+7$ (D) $4x-7$

<解析>

$$\text{令 } f(x) = (x+2)(x^2-x-1) \cdot q(x) + 2x^2 - 6x + 5$$

$$\rightarrow f(x) = (x+2)(x^2-x-1) \cdot q(x) + 2(x^2-x-1) - 4x + 7$$

$$= (x^2-x-1)[(x+2) \cdot q(x) + 2] - 4x + 7$$

\therefore 餘式 $= -4x + 7$ ，選 C。

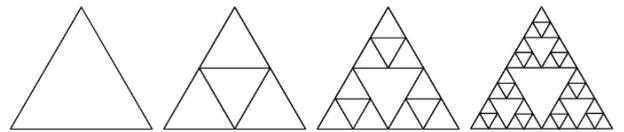
- (B) 2. 第一個圖是等邊三角形，第二個圖是把等邊三角形分割成 4 個不重疊的三角形，第三個圖是把等邊三角形分割成 13 個不重疊的三角形，第四個圖是把等邊三角形分割成 40 個不重疊的三角形，……，依此類推。第六個圖把等邊三角形分割成幾個不重疊的三角形? (A) 362 (B) 364 (C) 366 (D) 368

<解析>

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 13 \rightarrow 40$$

$$4 = 1 \times 3 + 1, 13 = 4 \times 3 + 1, 40 = 13 \times 3 + 1$$

故圖(5) $= 40 \times 3 + 1 = 121$ ，圖(6) $= 121 \times 3 + 1 = 364$ ，選 B。



圖(1)

圖(2)

圖(3)

圖(4)

- (C) 3. $\log 7 \doteq 0.8451$ ，試求 $10^{0.8451} = ?$ (A) 7.7 (B) 8 (C) 7 (D) 6

<解析>

$$10^{0.8451} = a \rightarrow 0.8451 \times \log 10 = \log a$$

$\therefore \log a = 0.8451, a = 7$ ，選 C。

- (C) 4. 甲由 1、2、3、4 四個數字中，任意寫出一個數字；乙由 1、2、5 三個數字中任意寫出一個數字。假設每個數字被寫的機會相等，則甲所寫的數字大於乙所寫的機率是多少? (A) $\frac{3}{12}$ (B) $\frac{4}{12}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{6}{12}$

<解析>

$$(\text{甲}, \text{乙}) = (4, 1), (4, 2), (3, 1), (3, 2), (2, 1)$$

故機率 $= \frac{5}{4 \times 3} = \frac{5}{12}$ ，選 C。

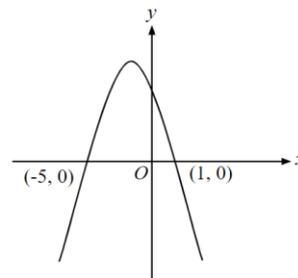
- (B)5. 如圖，二次函數的圖形交 x 軸於 $(-5, 0)$ 、 $(1, 0)$ 兩點，當 x 為下列何值時， y 值最大？(A) $x=-6$ (B) $x=-2$ (C) $x=3$ (D) $x=2$

<解析>

對稱軸： $x = \frac{-5+1}{2}$ ， $x=-2$

∴當 $x=-2$ ，有最高點(即 y 有最大值)

選 B。



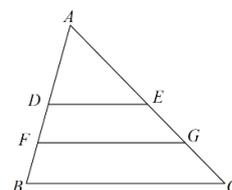
- (C)6. As shown in the picture, Linda's grandmother has a triangular piece of land, and grandma wants to divide the land into three equal parts for her granddaughters as dowry, and $\overline{DE} \parallel \overline{FG} \parallel \overline{BC}$. Linda helped grandma solve this problem, what is the $\overline{DE}:\overline{FG}:\overline{BC}$ calculated by Linda?(A) 1:4:9 (B) 1:2:3 (C) $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ (D) 2:3:4

<解析>

$\triangle ADE \sim \triangle AFG \sim \triangle ABC$

$\triangle ADE$ 面積： $\triangle AFG$ 面積： $\triangle ABC$ 面積 = 1:2:3

→ $\overline{DE}:\overline{FG}:\overline{BC} = \sqrt{1}:\sqrt{2}:\sqrt{3} = 1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ ，選 C。



- (A)7. 觀察右圖 3×3 與 4×4 方格中的數字規律，如果在 12×12 的方格中，依右圖的規律填入數字，則所填入的 144 個數字總和是多少？(A) 650 (B) 750 (C) 646 (D) 746

<解析>

將方格轉換成共 12 層三角形

$1 \quad \rightarrow 1^2$
 $1 \ 2 \ 1 \quad \rightarrow 2^2$
 $1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1 \rightarrow 3^2$
 $\dots \quad \dots \quad \dots$

1	2	3
1	2	2
1	1	1

1	2	3	4
1	2	3	3
1	2	2	2
1	1	1	1

∴數字和 = $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 12^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6} \times 12 \times 13 \times 25 = 650$ ，選 A。

- (B)8. What is the least number of obtuse angles (鈍角) of all the interior angles of a convex 14-gon? (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

<解析>

$360 \div 89 = 4 \dots 4$

至少有 $4-1=3$ 個外角是銳角

∴內角是鈍角最少有 $14-3=11$ 個，選 B。

(B)9. 設 $abc \neq 0$ ，若 $2^a = 3^b = \sqrt{6^c}$ ，求 $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = ?$ (A)1 (B)2 (C)3 (D)6

<解析>

$$2^a = 6^{\frac{c}{2}} \rightarrow 2 = 6^{\frac{c}{2a}} \dots \textcircled{1}$$

$$3^b = 6^{\frac{c}{2}} \rightarrow 3 = 6^{\frac{c}{2b}} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times \textcircled{2} \rightarrow 6 = 6^{\frac{c}{2a}} \cdot 6^{\frac{c}{2b}} = 6^{\frac{c}{2a} + \frac{c}{2b}}$$

$$\frac{c}{2a} + \frac{c}{2b} = 1, \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 2, \text{選 B。}$$

(A)10. 忠班有 40 人，這次數學定期測驗成績不太理想，於是吳老師將每位學生成績加 20 分後，再乘以 0.8，作為本次測驗分數，若加分前的全距為 a ，加分後的全距為 b ；若加分前的四分位距為 c ，加分後的四分位距為 d ，則下列哪一個都正確？(A) $a > b, c > d$ (B) $a = b, c = d$ (C) $a < b, c < d$ (D) $a > b, c < d$

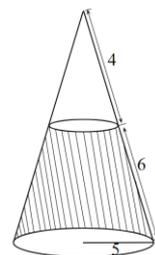
<解析>

假設原成績最高分為 x 分，最低分為 y 分

$$\therefore a = x - y, b = (x + 20) \times 0.8 - (y + 20) \times 0.8 = 0.8(x - y) \rightarrow a > b$$

$$c = Q_3 - Q_1, d = (Q_3 + 20) \times 0.8 - (Q_1 + 20) \times 0.8 = 0.8(Q_3 - Q_1) \rightarrow c > d$$

選 A。



(B)11. 如圖，將圓錐體平行底面橫切一刀，則剩下的斜線側面積是多少平方公分？
(A) 41π (B) 42π (C) 43π (D) 44π

<解析>

小圓的半徑為 r

$$\frac{r}{5} = \frac{4}{10}, r = 2, \text{側面積} = 10 \times 10 \times \pi \times \frac{5}{10} - 4 \times 4 \times \pi \times \frac{2}{4} = 50\pi - 8\pi = 42\pi \text{ (或 } \pi \times 5 \times 10 - \pi \times 4 \times 2 = 42\pi \text{)}$$

選 B。

(A)12. 設 $A(6, 2)$ 和 $B(-1, 6)$ ， C 為 x 軸上一點，若 $\angle ACB = 90^\circ$ ，則 C 點的坐標為？
(A) $(2, 0)$ 、 $(3, 0)$ (B) $(-2, 0)$ 、 $(3, 0)$ (C) $(2, 0)$ 、 $(-3, 0)$ (D) $(-2, 0)$ 、 $(-3, 0)$

<解析>

假設 $C(x, 0)$

$$m_{AC} = \frac{2-0}{6-x}, m_{BC} = \frac{6-0}{-1-x} \text{ 且 } \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$$

$$\therefore \frac{2-0}{6-x} \times \frac{6-0}{-1-x} = -1, 12 = -1(6-x)(-1-x), 12 = -x^2 + 5x + 6, x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x-3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 3 \text{ 或 } x = 2$$

則 C 點坐標 $(3, 0)$ $(2, 0)$ ，選 A。

(C)13. 假設 x 、 y 均為正實數，則 $(x+\frac{1}{y})(\frac{4}{x}+y)$ 的最小值為多少？(A)4 (B)6 (C)9 (D)12

<解析>

原式 $=4+xy+\frac{4}{xy}+1 = xy+\frac{4}{xy}+5$ ，且 $x>0$ ， $y>0$ ，故 $xy>0$

利用算幾不等式 $\frac{xy+\frac{4}{xy}}{2} \geq \sqrt{xy \cdot \frac{4}{xy}} \rightarrow \frac{xy+\frac{4}{xy}}{2} \geq 2$ ， $xy+\frac{4}{xy} \geq 4$

故 $xy+\frac{4}{xy}+5 \geq 4+5=9$ ，最小值是 9，選 C。

(B)14. 解方程 $\sqrt{\frac{20-x}{5+x}} + \sqrt{\frac{80+16x}{20-x}} = 4$ ，則 $\sqrt{4x+9}=?$ (A)1 (B)3 (C)5 (D)7

<解析>

$\sqrt{\frac{20-x}{5+x}} + \sqrt{\frac{16(5+x)}{20-x}} = 4$ ，令 $\sqrt{\frac{20-x}{5+x}} = a$

原式 $=a+\frac{4}{a}=4 \rightarrow a^2+4=4a$ ， $a^2-4a+4=0$ ， $(a-2)^2=0$ ， $a=2$ 代入

$\sqrt{\frac{20-x}{5+x}} = 2$ ， $\frac{20-x}{5+x} = 4$ ， $20-x=4(5+x)$ ， $x=0$

$\therefore \sqrt{4x+9} = \sqrt{9} = 3$ ，選 B。

(B)15. 如圖，圓 O 的圓心坐標 $(3, -2)$ ，圓外一點 $P(-3, 1)$ ，過 P 作圓 O 的割線 \overline{PB} ，交圓 O 於 A 、 B 兩點，且圓 O 之半徑為 4，求 $\overline{PA} \times \overline{PB}=?$ (A)27 (B)29 (C)30 (D)31

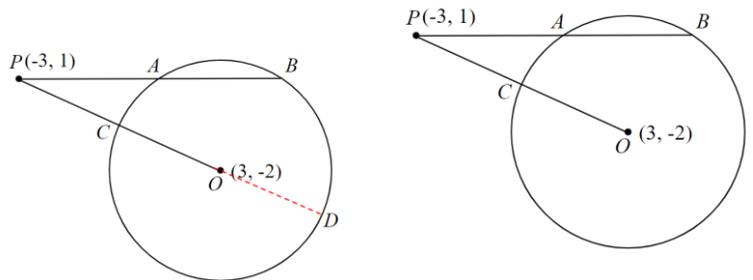
<解析>

延長 \overline{PO} ，交圓 O 於 D 點

$\overline{PO} = \sqrt{(3+3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{45}$

$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD} = (\sqrt{45}-4)(\sqrt{45}+4) = 29$

選 B。



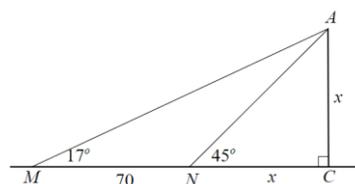
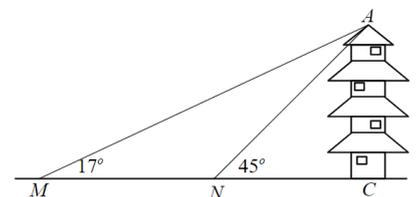
(C)16. 一座塔直立地面，從地面 M 處測量塔頂 A 得仰角 17° ，若向塔前進 70 公尺至 N 處，再測得塔頂仰角為 45° ，求塔高是多少公尺？(設 $\tan 17^\circ \doteq 0.3$) (A)24 (B)27 (C)30 (D)33

<解析>

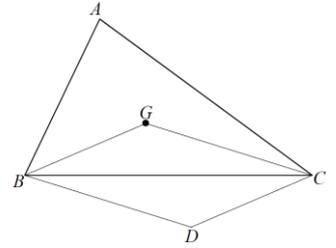
設高塔 $\overline{AC} = x$ 公尺， $\overline{CN} = x$ 公尺

在直角 $\triangle AMC$ 中

$\tan 17^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}} = \frac{x}{70+x} = 0.3$ ， $x = 0.3(70+x)$ ， $x = 30$ ，選 C。



- (C) 17. 如右圖， G 為 $\triangle ABC$ 的重心，且 $BDCG$ 為平行四邊形，若 $\triangle ABC$ 的面積為 42 平方單位，則 $BDCG$ 的面積為多少平方單位？(A)16 (B)20 (C)28 (D)32



<解析>

$\because G$ 為 $\triangle ABC$ 的重心

$$\therefore \triangle BGC \text{ 面積} = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \text{ 面積} = \frac{1}{3} \times 42 = 14$$

$\because BDCG$ 為平行四邊形

$\therefore BDCG$ 的面積 $= 2 \times \triangle BGC$ 面積 $= 2 \times 14 = 28$ (平方單位)，選 C。

- (A) 18. 如圖，在直角 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 3\text{cm}$ ， $\overline{AC} = 4\text{cm}$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ， D 在 \overline{BC} 上，令 $\triangle ACD$ 的內切圓半徑為 $r\text{cm}$ ，則 r 之值=? (A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C)1 (D) $\frac{3}{2}$

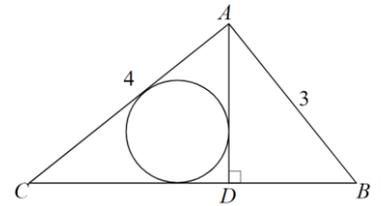
<解析>

$\because \angle BAC = 90^\circ$

$$\therefore \overline{BC} = 5 \rightarrow \overline{AD} = \frac{4 \times 3}{5} = 2.4$$

$$\triangle ACD \text{ 中，} \overline{AC} = 4, \overline{AD} = 2.4, \overline{CD} = \sqrt{4^2 - 2.4^2} = 3.2$$

$$r = \frac{2.4 + 3.2 - 4}{2} = 0.8 = \frac{4}{5}, \text{ 選 A。}$$



- (B) 19. If $x^2 - x + 1 = 0$, then $x^{2023} - x^{2022} - x + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$. (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

<解析>

$$x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow x^2 = x - 1$$

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \rightarrow x^3 + 1 = 0, x^3 = -1$$

$$x^{2023} - x^{2022} = x^{2022}(x-1) = x^{2022} \cdot x^2 = x^{2024} = (x^3)^{674} \cdot x^2 = x^2$$

$$x^{2023} - x^{2022} - x + 1 = x^2 - x + 1 = 0$$

選 B。

- (C) 20. The foreign language school has 2023 students. Of these, 1,060 spoke English, 736 spoke Japanese, 640 spoke both Japanese and English, and 178 spoke French, English and Japanese. And everyone speaks at least one of three languages, English, Japanese, and French. How many people can only speak French? (A)845 (B)851 (C)867 (D)889

<解析>

$$f + 178 = 640 \rightarrow f = 462$$

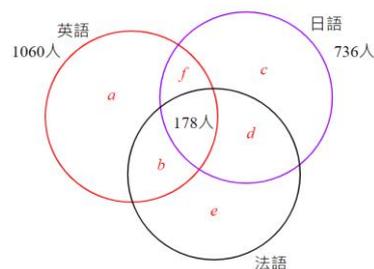
$$a + b + 462 + 178 = 1060 \rightarrow a + b = 420$$

$$c + d + 462 + 178 = 736 \rightarrow c + d = 96$$

$$a + b + f + 178 + c + d + e = 2023$$

$$420 + 462 + 178 + 96 + e = 2023$$

$$e = 867, \text{ 選 C,}$$



- (A)24.通訊公司員工有3天連假，員工可從12月17日(六)到12月24日(六)，這8天中連續3天放假，用抽籤的方式來決定，員工云蓉抽中星期六或星期日的機率是多少? (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{2}{7}$

<解析>

(六、日、一)，(日、一、二)，(一、二、三)，(二、三、四)，(三、四、五)，(四、五、六)
共有6種

其中星期六或星期日有3種，所以機率 $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ，選A。

- (B)25. $n!$ 表示 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$ (例如: $4!=1 \times 2 \times 3 \times 4=24$)，如果計算 $15!=130767a368000$ ，則 $a=?$ (A)3 (B)4 (C)5 (D)6

<解析>

$15!$ 的質數有2、3、5、7、11、13

$\therefore 130767a368000$ 符合11的倍數

$(3+7+7+3+8+0)-(1+0+6+a+6+0+0)$ 是0或11的倍數

$28-13-a=0$ ， $a=15$ (不合)

$28-13-a=11$ ， $a=4$ ，選B。

<另解>

$15!$ 是9的倍數

$1+3+7+6+7+a+3+6+8$ 是9的倍數

$41+a=45$ ， $a=4$

二、 計算題(25分/25分，共50分，請寫出計算過程，可得過程分)

1. 設 $x+y+z=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ ，且 $x^2+y^2+z^2=\frac{11+2\sqrt{7}}{2}$ ，試求 $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$ 之值為何?

<解析>

$$\therefore x+y+z=\frac{3+\sqrt{7}}{2}, (x+y+z)^2=\frac{16+6\sqrt{7}}{4}=\frac{8+3\sqrt{7}}{2}$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)=\frac{8+3\sqrt{7}}{2} \rightarrow \frac{11+2\sqrt{7}}{2}+2(xy+yz+xz)=\frac{8+3\sqrt{7}}{2}, xy+yz+xz=\frac{8+3\sqrt{7}-11-2\sqrt{7}}{4}=\frac{-3+\sqrt{7}}{4}$$

$$\begin{aligned} (x+y)(y+z)(z+x)+xyz &= x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+3xyz \\ &= x^2y+xy^2+xyz+y^2z+yz^2+xyz+z^2x+zx^2+xyz \\ &= xy(x+y+z)+yz(x+y+z)+xz(x+y+z) \\ &= (x+y+z)(xy+yz+xz) \\ &= \frac{3+\sqrt{7}}{2} \times \frac{-3+\sqrt{7}}{4} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

答: $-\frac{1}{4}$

2. 民國年數加上 1911 就是西元年數，例如：民國 74 年，西元 $74+1911=1985$ 年，今年是 2022 年，請你用「你的年齡 x 歲，你的手機號碼最後兩碼是 y 」，求出下列 \square 是多少？

① 想一下你(妳)的手機號碼的最後兩位數字

② 把這個數字乘以 8

③ 然後加上 16，再乘以 125

④ 得到的積數除以 10

⑤ 把得到的數加上 \square

⑥ 最後一個步驟，用這個和數減去你(妳)出生的西元年，現在你(妳)看到的四位數的數字，前兩位數是你(妳)的手機號碼最後兩位數，接下來就是你(妳)的實際年齡。

<解析>

年齡 x 歲 \rightarrow 出生 $(2022-x)$ 年

$$(8y+16) \times 125 \div 10 + \square - (2022-x) = 100y+x$$

$$100y+200+\square-2022+x=100y+x$$

$$200+\square-2022=0$$

$$\square=2022-200=1822$$

答:1822