



第十八屆IMC國際數學競賽初賽(台灣區)

Eighteenth IMC International Mathematics Preliminary Contest (Taiwan)

國中三年級(初賽)試卷

考試時間: 60 分鐘 卷面總分:300 分 得分: _____

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

1. 設 $a=197^2+197\times 6+3^2$ ， $b=206\times 194$ ， $c=200^2-3^2$ ，則下列有關 a 、 b 、 c 三數的大小關係，何者正確? (A) $a>b>c$ (B) $a>c>b$ (C) $b>c>a$ (D) $b>a>c$

<解析>

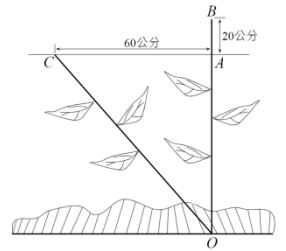
$$a=197^2+197\times 6+3^2=(197+3)^2=200^2$$

$$b=206\times 194=(200+6)(200-6)=200^2-36$$

$$c=200^2-9$$

$\therefore a>c>b$ ，選 B。

2. 有一水中植物，露出水面的長度 \overline{AB} 為 20 公分，若將它如右圖斜移，得 \overline{AC} 為 60 公分，則此水中植物的長度 \overline{OB} 是多少公分? (A)60 (B)80 (C)100 (D)120



<解析>

假設 $\overline{OA}=x$ 公分，則 $\overline{OC}=\overline{OB}=x+20$

$$\therefore x^2+60^2=(x+20)^2$$

$$\therefore x^2+3600=x^2+40x+400$$

$\therefore x=80$ ，則 $\overline{OB}=80+20=100$ ，選 C。

3. 求 $\frac{103^4-81}{(103^2+9)\times 106}=?$ (A)97 (B)98 (C)99 (D)100

<解析>

$$\text{令 } x=103, \frac{x^4-81}{(x^2+9)(x+3)} = \frac{(x^2+9)(x^2-9)}{(x^2+9)(x+3)} = \frac{(x^2+9)(x+3)(x-3)}{(x^2+9)(x+3)} = x-3=100, \text{ 選 D。}$$

4. 方程式 $\frac{x+3}{3-x} + \frac{x+6}{6-x} + \frac{x+9}{9-x} = 3$ ，解出的根最大是下列哪個？

- (A) $2+\sqrt{3}$ (B) $4+\sqrt{3}$ (C) $6+\sqrt{3}$ (D) $8+\sqrt{3}$

<解析>

$$\left(\frac{x+3}{3-x}-1\right) + \left(\frac{x+6}{6-x}-1\right) + \left(\frac{x+9}{9-x}-1\right) = 0$$

$$\frac{2x}{3-x} + \frac{2x}{6-x} + \frac{2x}{9-x} = 0$$

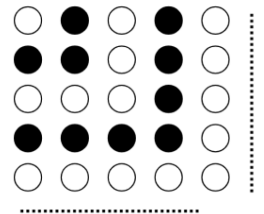
$$2x\left(\frac{1}{3-x} + \frac{1}{6-x} + \frac{1}{9-x}\right) = 0$$

$$2x[(6-x)(9-x) + (3-x)(9-x) + (3-x)(6-x)] = 0$$

$$2x(x^2 - 12x + 33) = 0$$

$\therefore x=0$ 或 $x=6\pm\sqrt{3}$ ，最大根式 $=x=6+\sqrt{3}$ ，選 C。

5. Arrange the black and white chess pieces in the pattern on the right. When there are 12 pieces on each side, how many more black chess pieces than the white chess pieces? (A)9 (B)10 (C)11 (D)12



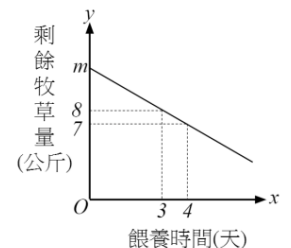
<解析>

白色 $=1+5+9+13+17+21$

黑色 $=3+7+11+15+19+23$

相差 $= (3-1) + (7-5) + (11-9) + (15-13) + (19-17) + (23-21) = 12$ ，選 D。

6. 阿達在網路遊戲中養了一隻恐龍，某日他買了 m 公斤的牧草要餵養恐龍，已知剩餘牧草量(公斤)和餵養天數成線型函數關係，如右圖所示，則 $m=?$ (A)9 (B)10 (C)11 (D)12



<解析>

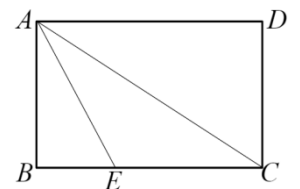
設 $y = ax + b$

$$\begin{cases} 8 = 3a + b \\ 7 = 4a + b \end{cases} \rightarrow a = -1, b = 11$$

則線型函數: $y = -x + 11$ ，代入 $(0, m)$

$\therefore m = 0 + 11 = 11$ ，選 C。

7. 如右圖，長方形 ABCD 中，E 點在 \overline{BC} 上，且 \overline{AE} 平分 $\angle BAC$ 。若 $\overline{BE} = 4$ ， $\overline{AC} = 15$ ，則 $\triangle AEC$ 的面積為何? (A)30 (B)32 (C)20 (D)10



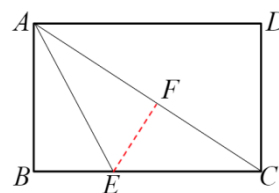
<解析>

過 E 點作 $\overline{EF} \perp \overline{AC}$

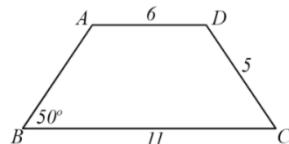
$\therefore \overline{AE}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線

$\therefore \overline{BE} = \overline{EF} = 4$

$\therefore \triangle AEC$ 面積 $= 15 \times 4 \div 2 = 30$ ，選 A。



8. 梯形 ABCD 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{BC} = 11$ ， $\overline{CD} = 5$ ， $\angle B = 50^\circ$ ，求 $\angle D = ?$ (A) 100° (B) 105° (C) 110° (D) 115°



<解析>

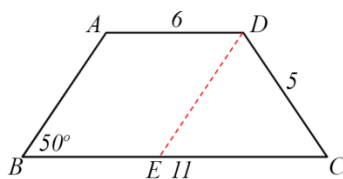
過 D 點作 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

$$\overline{BE} = \overline{AD} = 6, \overline{CE} = 11 - 6 = 5$$

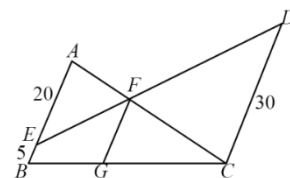
$$\angle CDE = \angle CED = \angle B = 50^\circ$$

$$\text{又 } \overline{AD} \parallel \overline{BC} \rightarrow \angle CED = \angle ADE = 50^\circ$$

$$\therefore \angle D = 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ, \text{ 選 A。}$$



9. 如右圖所示， $\overline{AB} \parallel \overline{FG} \parallel \overline{DC}$ ，若 $\overline{AE} = 20$ ， $\overline{BE} = 5$ ， $\overline{CD} = 30$ ，則 $\overline{FG} = ?$ (A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 20



<解析>

$\triangle AEF$ 、 $\triangle CDF$

$$\textcircled{1} \angle AFE = \angle DFC$$

$$\textcircled{2} \angle AEF = \angle FDC$$

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CDF$ (AA 相似)

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{FD}} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{\overline{EF}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GC}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \overline{FG} = \frac{3 \times 5 + 2 \times 30}{2 + 3} = 15, \text{ 選 C。}$$

10. In class, May took a blue wood chip and a green wood chip. $\frac{3}{8}$ of the blue wood chip and $\frac{1}{3}$ of the green wood chip were overlapped and bonded. Finally the wood chip is length of 280 cm. What is the length of the original blue wood chip? (A) 160 (B) 180 (C) 200 (D) 240

<解析>

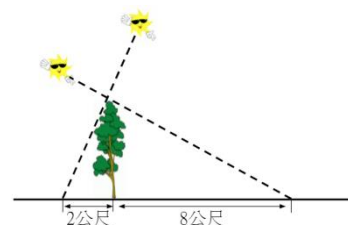
藍色未重疊：重疊 = 5 : 3；綠色重疊：未重疊 = 1 : 2

藍色未重疊 重疊 綠色未重疊

5	3	2
5	3	6

$$\therefore 280 \div (5 + 3 + 6) \times 8 = 160, \text{ 選 A。}$$

11. 如右圖，早上 10 時，小鈺測得大樹的影長為 2 公尺，到了下午 4 時，影長為 8 公尺，若兩次日照的光線互相垂直，則大樹的高度為幾公尺？(A) 4 (B) $\sqrt{10}$ (C) 5 (D) $\sqrt{12}$



<解析>

假設樹高為 x 公尺

$$x^2 = 2 \times 8 \rightarrow x = \pm 4 \text{ (取正數)}, \text{ 選 A。}$$

12. 如右圖， $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 100$ ， $\angle ACB = 63^\circ$ ， $\angle DCE = 27^\circ$ ， $\overline{AC} : \overline{CD} = 5 : 4$ ，求 \overline{DE} 之長=? ($\tan 63^\circ \doteq 2$) (A)18 (B)20 (C)22 (D)24

<解析>

$\triangle ABC$ 、 $\triangle DEC$

① $\angle BAC = \angle EDC$

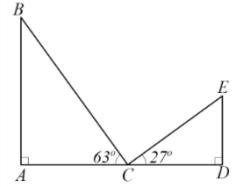
② $\angle BCA = \angle CED = 63^\circ$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEC$

$$\tan 63^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{100}{\overline{AC}} \rightarrow 2 = \frac{100}{\overline{AC}}, \overline{AC} = 50$$

且 $\overline{AC} : \overline{CD} = 5 : 4 \rightarrow 50 : \overline{CD} = 5 : 4, \overline{CD} = 40$

$$\tan 63^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{40}{\overline{DE}}, 2 = \frac{40}{\overline{DE}}, \overline{DE} = 20, \text{選 B。}$$



13. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中，高 $\overline{AH} = 12$ ， $\overline{BC} = 30$ ，若內接半圓的直徑 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則內接半圓的半徑=? (A) $\frac{32}{5}$ (B) $\frac{27}{4}$ (C) $\frac{35}{6}$ (D) $\frac{20}{3}$

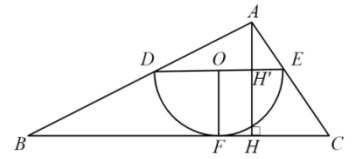
<解析>

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

假設半徑= r

$$\frac{12-r}{12} = \frac{2r}{30}$$

$$\therefore r = \frac{20}{3}, \text{選 D。}$$



14. 如右圖，若 $\overline{CD} : \overline{BD} = 1 : 3$ ， $\overline{DF} : \overline{AF} = 1 : 2$ ，則 $\overline{AE} : \overline{CE} = ?$
(A) 2 : 1 (B) 3 : 2 (C) 4 : 3 (D) 5 : 4

<解析>

過D點作 $\overline{DG} \parallel \overline{BE}$ ，交 \overline{AC} 於G點

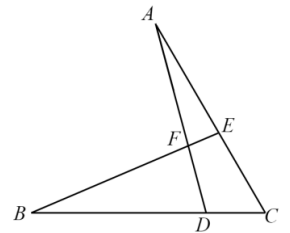
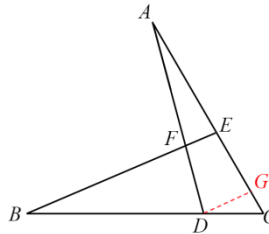
$$\therefore \overline{DG} \parallel \overline{BE}$$

$$\therefore \overline{GC} : \overline{EG} = \overline{CD} : \overline{BD} = 1 : 3$$

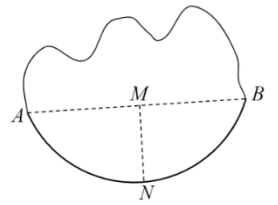
$$\therefore \overline{AE} : \overline{EG} = \overline{AF} : \overline{DF} = 2 : 1 = 6 : 3$$

$$\therefore \overline{AE} : \overline{EG} : \overline{CG} = 6 : 3 : 1$$

$$\rightarrow \overline{AE} : \overline{CE} = 6 : (3+1) = 3 : 2, \text{選 B。}$$



15. A circular mirror dropped to the ground. This mirror shattered into several pieces. One of the mirror fragments is shown on the right. M is the midpoint of \overline{AB} . N is the midpoint of \widehat{AB} . Then $\overline{AB} = 24$, $\overline{MN} = 8$, what is the original area of this circular mirror? (A) 144π (B) 169π (C) 196π (D) 225π



<解析>

設半徑 $\overline{OB} = x$

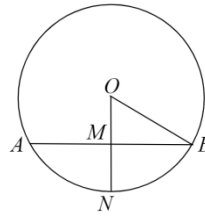
則 $\overline{OM} = (x-8)$

且 $\overline{AM} = \overline{BM} = 12$

$$\therefore x^2 = (x-8)^2 + 12^2$$

$$\therefore x = 13$$

則圓面積 $= 13 \times 13 \times \pi = 169\pi$ ，選 B。



16. 若 $(3x^2 + ax - 6)(2x^2 + x - 1) = 6x^4 + bx^3 + cx^2 - 2x + 6$ ，求 $a+b+c$ 之值? (A) -24 (B) -26 (C) -28 (D) -30

<解析>

$$x^3 \text{ 的係數} = 3x^2 \cdot x + 2x^2 \cdot ax = (3+2a)x^3 = bx^3$$

$$x^2 \text{ 的係數} = 3x^2 \cdot (-1) + 2x^2 \cdot (-6) + ax \cdot x = (-3-12+a)x^2 = cx^2$$

$$x \text{ 的係數} = -6x - ax = -2x, a = -4$$

$$\therefore b = 3 + 2 \cdot (-4) = -5, c = -3 - 12 + (-4) = -19$$

則 $a+b+c = (-4) + (-5) + (-19) = -28$ ，選 C。

17. $f(x)$ = 實數 x 的小數部分，求 $f(\frac{4 \times 1}{89}) + f(\frac{4 \times 2}{89}) + f(\frac{4 \times 3}{89}) + \dots + f(\frac{4 \times 88}{89}) + f(\frac{4 \times 89}{89}) = ?$ (A) 44 (B) 45 (C) 89 (D) 90

<解析>

$$[f(\frac{4 \times 1}{89}) + f(\frac{4 \times 2}{89}) + \dots + f(\frac{4 \times 22}{89})] + [f(\frac{4 \times 23}{89}) + f(\frac{4 \times 24}{89}) + \dots + f(\frac{4 \times 44}{89})]$$

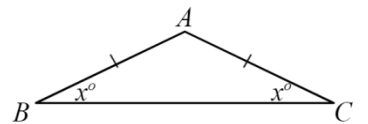
$$+ [f(\frac{4 \times 45}{89}) + f(\frac{4 \times 46}{89}) + \dots + f(\frac{4 \times 66}{89})] + [f(\frac{4 \times 67}{89}) + f(\frac{4 \times 68}{89}) + \dots + f(\frac{4 \times 88}{89})] + f(\frac{4 \times 89}{89})$$

$$= [\frac{4}{89} + \frac{8}{89} + \dots + \frac{88}{89}] + [\frac{3}{89} + \frac{7}{89} + \dots + \frac{87}{89}] + [\frac{2}{89} + \frac{6}{89} + \dots + \frac{86}{89}] + [\frac{1}{89} + \frac{5}{89} + \dots + \frac{85}{89}] + 0$$

$$= \frac{1}{89} (1+2+3+\dots+88) = \frac{1}{89} \cdot \frac{(1+88) \times 88}{2} = 44, \text{選 A。}$$

18. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，若 $\overline{BC} > \overline{AB}$ ，求 x 的範圍?

- (A) $0^\circ < x^\circ < 60^\circ$ (B) $30^\circ < x^\circ < 60^\circ$ (C) $0^\circ < x^\circ < 30^\circ$ (D) $60^\circ < x^\circ < 90^\circ$



<解析>

$$0^\circ < \text{底角} < 90^\circ \rightarrow 0^\circ < x^\circ < 90^\circ$$

$$\overline{BC} > \overline{AB} \rightarrow \angle A > \angle C, 180 - 2x > x$$

$$\therefore 180 > 3x, 60 > x$$

$$\therefore 60^\circ > x > 0^\circ, \text{選 A。}$$

19. 如圖所示，若 $\overline{AB} = \overline{AC} = 6$ ，且 $\overline{AP} = 4$ ，求 $\overline{AD} = ?$ (A)6 (B)7 (C)8 (D)9

<解析>

連接 \overline{BD} ， $\triangle ADB$ 、 $\triangle ABP$

① $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$

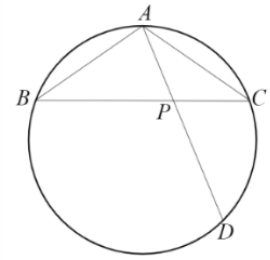
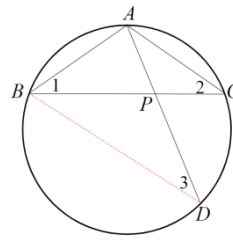
② $\angle BAP = \angle BAD$

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle ABP$ (AA 相似)

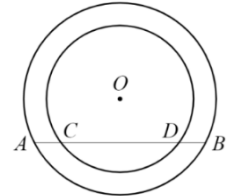
假設 $\overline{PD} = x$

$6 : (x+4) = 4 : 6 \rightarrow 36 = 4x + 16$ ， $x = 5$

$\therefore \overline{AD} = \overline{AP} + \overline{PD} = 4 + 5 = 9$ ，選 D。



20. As shown in the figure, \overline{AB} is the chord of the great circle in two concentric circles. \overline{AB} crosses the small circle at points C and D. If $\overline{AB} = 16$, $\overline{CD} = 12$ and the string center distance of \overline{AB} is 5. What is the area of the annular area enclosed by the two circles? (A) 20π (B) 24π (C) 28π (D) 32π



<解析>

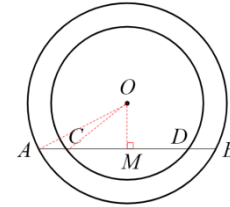
連接 \overline{AO} 、 \overline{OC} ，作 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 交 \overline{AB} 於 M 點

$\therefore \overline{OM} = 5$ 、 $\overline{AM} = 8$ 、 $\overline{CM} = 6$

$\therefore \overline{OA}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{OM}^2 = 64 + 25 = 89$

且 $\overline{OC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{OM}^2 = 36 + 25 = 61$

\therefore 環形面積 $= \overline{OA}^2 \pi - \overline{OC}^2 \pi = (89 - 61)\pi = 28\pi$ ，選 C。



21. 如圖，A、B、C、D 四點共圓，其中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{BC} = 9$ ，將 \overline{AB} 與 \overline{CD} 延長相交於 E，則 $\triangle ADE$ 面積 = ? (A)2 (B)3 (C)4 (D)6

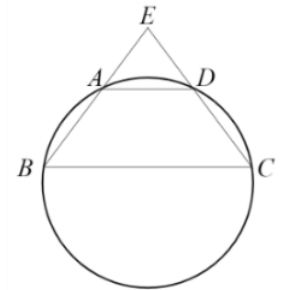
<解析>

假設 $\overline{AE} = x$ ，利用平行截線性質

$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \rightarrow \frac{x}{x+5} = \frac{3}{9}$ ， $x = 2.5$

求 $\triangle ADE$ 的高 $= \sqrt{2.5^2 - 1.5^2} = \sqrt{4 \times 1} = 2$

故 $\triangle ADE$ 的面積 $= 3 \times 2 \div 2 = 3$ ，選 B。



22. ABCD 為圓內接四邊形， $\angle P = 46^\circ$ ， $\angle Q = 36^\circ$ ，求 $\angle C$ 的度數是多少？

(A) 49° (B) 82° (C) 51° (D) 72°

<解析>

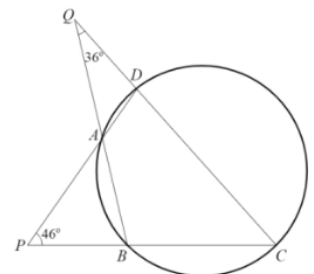
\therefore ABCD 為圓內接四邊形 $\rightarrow \angle B + \angle D = 180^\circ \dots\dots ①$

且 $\angle B + \angle C = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ \dots\dots ②$

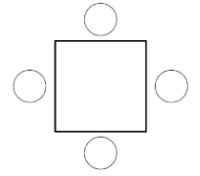
且 $\angle C + \angle D = 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ \dots\dots ③$

①-③: $\angle B - \angle C = 180^\circ - 134^\circ = 46^\circ$

(②-③) $\div 2$: $2 \times \angle C = 144^\circ - 46^\circ$ ， $\angle C = 49^\circ$ ，選 A。



23. 佩佩一家四口到餐廳用餐，其餐桌座位如右圖所示，若四人隨機入座，則佩佩坐在媽媽對面的機率是多少？(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$



<解析>

四個座位 A、B、C、D

若 A 座位對面 C 座位；B 座位對面 D 座位

先選座位： $4 \times 2 \times 1 \times 1 = 8$

任意坐： $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

坐對面的機率 = $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ ，選 C

<另解>

媽媽坐定位置後，佩佩有 3 種選擇，只有一種選擇會坐到媽媽的對面

故機率 = $\frac{1}{3}$

24. 阿彬到市場買水果，其身上帶錢可以買 12 個柳丁或 28 個蘋果或 42 個奇異果，如今三種水果都買，每種數量都相等，問他應該各買幾個？(A)9 (B)10 (C)7 (D)8

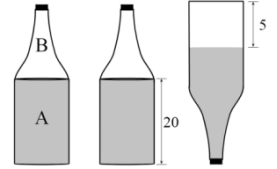
<解析>

$12 \times \triangle = 28 \times \square = 42 \times \star$ 且 $[12, 28, 42] = 84$

$\triangle = 7$ ， $\square = 3$ ， $\star = 2$

則 $84 \div (7+3+2) = 7$ ，各買 7 個，選 C。

25. A bottle of beverage has two parts A and B. Part A is a cylinder, as shown in the picture. Now the bottle contains some drinks. The height of the beverage is 20 cm when placed. The height of the remaining part is 5 cm when it is reversed. If the volume of the beverage bottle is 30000 cm^3 . What is the volume of the existing beverage in the bottle? (A)20000 (B)22000 (C)24000 (D)26000

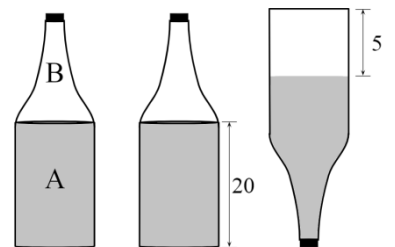


<解析>

假設 A 部分的底面積 = $x \text{ cm}^2 \rightarrow$ A 體積 $20x \text{ cm}^3$ ，B 體積 $5x \text{ cm}^3$

$20x + 5x = 30000$ ， $x = 1200$

則 $1200 \times 20 = 24000$ ，選 C。



二、計算題(每題 25 分，共 50 分，請寫出簡要過程，可得過程分)

1. 右圖為一示意圖，浩東想知道燈塔的高度 \overline{AB} ，他選定恰當的時間，在 D 點垂直豎立標竿 \overline{CD} 為 1.5 公尺，竿影 \overline{DE} 為 3 公尺，而且 $B、D、E$ 在同一直線上，同時，沿著 \overline{DE} 方向上，雯雯在 G 點也豎立同高的標竿 \overline{FG} ，其影長 \overline{GH} 為 6 公尺，若已知 \overline{DG} 為 17 公尺，求 $\overline{AB}=?$

<解析>

假設 $\overline{AB}=x$ 公尺， $\overline{BD}=y$ 公尺

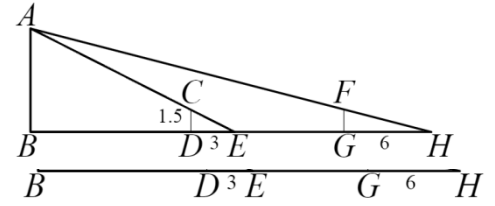
且 $\overline{CD}=\overline{FG}=1.5$

$$\overline{CD} \parallel \overline{AB} \rightarrow \frac{1.5}{x} = \frac{3}{y+3}, \quad \frac{1}{x} = \frac{2}{y+3}$$

$$\overline{FG} \parallel \overline{AB} \rightarrow \frac{1.5}{x} = \frac{6}{y+23}, \quad \frac{1}{x} = \frac{4}{y+23}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{2}{y+3} = \frac{4}{y+23} \rightarrow 4y+12=2y+46, \quad y=17, \quad x=10$$

則 $\overline{AB}=10$ 公尺。



2. 當 $a、b$ 為何值，方程式 $x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$ ，有兩個實數根。

<解析>

$$x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$$

$$D=(2+2a)^2-4\cdot(3a^2+4ab+4b^2+2)\geq 0$$

$$4+8a+4a^2-12a^2-16ab-16b^2-8\geq 0$$

$$\therefore -8a^2+8a-16ab-16b^2-4\geq 0 \rightarrow 2a^2-2a+4ab+4b^2+1\leq 0 \text{ (有兩實數根)}$$

$$\therefore (a^2-2a+1)+(a^2+4ab+4b^2)=(a-1)^2+(a+2b)^2=0$$

$$\therefore a=1, \quad b=-\frac{1}{2}$$