



第十八屆IMC國際數學競賽初賽(台灣區)

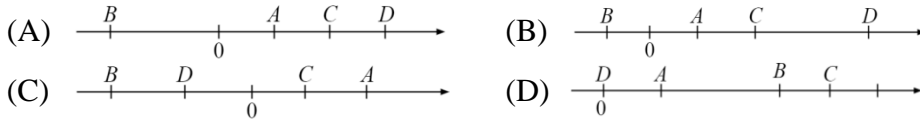
Eighteenth IMC International Mathematics Preliminary Contest (Taiwan)

國中二年級(初賽)試卷

考試時間: 60 分鐘 卷面總分:300 分 得分: _____

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

1. 數線上 A(a)、B(b)、C(c)、D(d)，且 $|a-b| > |c-d|$ ， $ab < 0$ ， $cd > 0$ ，則下列哪一個可能是 A、B、C、D 在數線上的位置？



<解析>

$ab < 0 \rightarrow a、b$ 為異號數， $cd > 0 \rightarrow c、d$ 為同號數

$|a-b| = \overline{AB}$ ， $|c-d| = \overline{CD}$ ， $\overline{AB} > \overline{CD}$ ，選 A。

2. 計算 $2012 \times 2010 + 2013^2 - 2010 \times 2016 - 2011^2$ 之值為多少？(A)8 (B)2010 (C)2018 (D)4028

<解析>

令 $a = 2010$

原式 $= (a+2)a + (a+3)^2 - a \times (a+6) - (a+1)^2 = a^2 + 2a + a^2 + 6a + 9 - a^2 - 6a - a^2 - 2a - 1 = 9 - 1 = 8$

選 A。

3. 根據圖形規律判斷，遺漏的圖形中有多少個星號？(A)14 (B)12 (C)16 (D)13



<解析>

由上而下的數量關係： $3+1+4+1+3=12$ 個

選 B。

4. 計算 $(\frac{1}{85 \times 87} + 1)(\frac{1}{86 \times 88} + 1)(\frac{1}{87 \times 89} + 1)(\frac{1}{88 \times 90} + 1) = ?$ (A) $\frac{3827}{3825}$ (B) $\frac{3917}{3925}$ (C) $\frac{3827}{3815}$ (D) $\frac{3917}{3825}$

<解析>

原式 $= \frac{1+85 \times 87}{85 \times 87} \times \frac{1+86 \times 88}{86 \times 88} \times \frac{1+87 \times 89}{87 \times 89} \times \frac{1+88 \times 90}{88 \times 90} = \frac{86^2 - 1 + 1}{85 \times 87} \times \frac{87^2 - 1 + 1}{86 \times 88} \times \frac{88^2 - 1 + 1}{87 \times 89} \times \frac{89^2 - 1 + 1}{88 \times 90}$
 $= \frac{86 \times 86}{85 \times 87} \times \frac{87 \times 87}{86 \times 88} \times \frac{88 \times 88}{87 \times 89} \times \frac{89 \times 89}{88 \times 90} = \frac{86}{85} \times \frac{89}{90} = \frac{3827}{3825}$ ，選 A。

5. The base side of a triangle is $\sqrt{12}$ cm and the area is $(3+\sqrt{6})$ cm². How much is the height of the triangle? (A) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

<解析>

假設底邊是 x 公分

$$\sqrt{12} \times x \div 2 = 3 + \sqrt{6}$$

$$x = \frac{6 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \frac{6\sqrt{12} + 2\sqrt{72}}{12} = \frac{12\sqrt{3} + 12\sqrt{2}}{12} = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \text{ 選 A。}$$

6. 小樂買了一雙球鞋和一件運動褲共花了 1600 元，小楷隔一週去買相同的球鞋和運動褲，發現球鞋打六折，運動褲漲了 30%，結果他比小樂多花 60 元，則球鞋打六折是多少元?(A)300 (B)330 (C)340 (D)360

<解析>

假設球鞋 x 元，運動褲 $1600-x$ 元

$$0.6x + 1.3(1600 - x) = 1600 + 60$$

$$0.6x + 2080 - 1.3x = 1660$$

$$0.7x = 420 \rightarrow x = 600$$

則球鞋打六折 = $600 \times 0.6 = 360$ ，選 D。

7. 阿德和小忠到書局買同一種原子筆，但枝數不相同，原子筆的價格為整數，且大約在 10~15 元之間，而阿德花了 130 元，小忠花了 286 元，則原子筆一枝為多少元?(A)10 (B)12 (C)13 (D)15

<解析>

$$(130, 286) = 26$$

26 的因數 = 1、2、13、26

∵ 價格在 10~15 元之間

∴ 原子筆每枝 13 元，選 C。

8. 有兩個罐子裝有相同的重量的酒精溶液，其中水和酒精的重量分別為 3:2 與 1:1，若將這兩罐全倒入一個較大的容器中，且沒有溢出來，則後來所得到的混合液中，水和酒精重量比為何?(A) 2:1 (B) 3:2 (C) 4:3 (D) 11:9

<解析>

假設重量皆為 x

$$\text{甲} \rightarrow \text{水} : \text{酒精} = \frac{3}{5}x : \frac{2}{5}x, \text{ 乙} \rightarrow \text{水} : \text{酒精} = \frac{1}{2}x : \frac{1}{2}x$$

$$\text{混合後} \rightarrow \text{水} : \text{酒精} = \left(\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}x\right) : \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}x\right) = \frac{11}{10}x : \frac{9}{10}x = 11 : 9, \text{ 選 D。}$$

9. $(2x-1)^5 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ ，則 $a_5 - a_4 + a_3 - a_2 + a_1 - a_0 = ?$ (A)243 (B)-243 (C)81 (D)-81

<解析>

$$\text{令 } x = -1, (-2-1)^5 = -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$

$$\therefore -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = -243$$

則 $a_5 - a_4 + a_3 - a_2 + a_1 - a_0 = 243$ ，選 A。

10. The contractor has a piece of work to be completed. Workers complete $\frac{5}{7}$ of the work in 25 days. If workers maintain efficiency, how many days will it take to complete? (A)8 (B)5 (C)10 (D)13

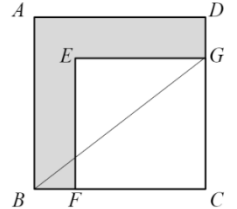
<解析>

$$\frac{5}{7} : 25 = 1 : x$$

$$\therefore x = 25 \div \frac{5}{7} = 35$$

35-25=10，選 C。

11. 如右圖，小綾將邊長不等的兩張正方形色紙 ABCD 與 EFCG 的一角重疊在一起，若灰色區域的面積為 112 平方公分，且 $\overline{BG} = 20$ 公分，則此兩張色紙的邊長相差多少公分? (A)2 (B)3 (C)4 (D)5



<解析>

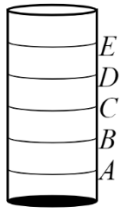
假設 $\overline{CG} = x$ ， $\overline{BC} = y$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20^2 \\ y^2 - x^2 = 112 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 400 \\ y^2 - x^2 = 112 \end{cases}$$

$$\therefore 2y^2 = 512, y = 16; 2x^2 = 288, x = 12$$

$$\therefore y - x = 16 - 12 = 4, \text{選 C。}$$

12. 右圖是一個圓柱形罐子，可以裝 24 杯水或 6 桶水，如果倒入 5 杯水和 2 桶水，水面應該升到哪兩條線之間? (A)A~B (B)B~C (C)C~D (D)D~E



<解析>

$$24 \div 6 = 4 \rightarrow \text{每格需要 4 杯水}$$

$$6 \div 6 = 1 \rightarrow \text{每格需要 1 桶水}$$

$$\text{故 5 杯水和 2 桶水} = 4 \text{ 杯} + 1 \text{ 桶} + 1 \text{ 桶} + 1 \text{ 杯} = 3 \text{ 格} + 1 \text{ 杯水}$$

$$\therefore \text{水面落在 C~D 之間，選 C。}$$

13. 若 $|x| = 3x + 1$ ，則 $(64x^2 + 48x + 9)^{2020} = ?$ (A)1 (B)2 (C)4 (D)8

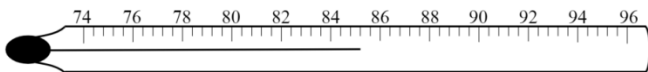
<解析>

$$|x|^2 = (3x + 1)^2 \rightarrow x^2 = 9x^2 + 6x + 1, 8x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$64x^2 + 48x + 9 = 8(8x^2 + 6x + 1) + 1 = 8 \times 0 + 1 = 1$$

$$\therefore (64x^2 + 48x + 9)^{2020} = 1^{2020} = 1, \text{選 A。}$$

14. 求下圖所表示溫度是幾度? (A) 85.2°C (B) 84.3°C (C) 85.3°C (D) 81.6°C



<解析>

$$86 - 84 = 2$$

$$2 \div 5 \times 3 = 1.2$$

$$84 + 1.2 = 85.2, \text{選 A。}$$

15. A bucket is filled with water, and three wooden sticks A, B, C of unequal length are inserted. As a result, $\frac{1}{2}$ of the A stick, $\frac{1}{3}$ of the B stick, and $\frac{1}{6}$ of the C stick came out of the water. The total length of the three sticks is 94 cm. What is the depth of the water?
(A)10 cm (B)15 cm (C)20 cm (D)25 cm

<解析>

假設水深為 x 公分

$$A = x \div \frac{1}{2} = 2x, \quad B = x \div \frac{2}{3} = 1.5x, \quad C = x \div \frac{5}{6} = 1.2x$$

$$\therefore 2x + 1.5x + 1.2x = 94, \quad x = 20, \quad \text{選 C。}$$

16. 影印店規定：影印每張 1 元，影印 500 張以上打八五折，若筱平要影印的張數不足 500 張，但她發現印 500 張比較便宜，則筱平至少印幾張以上？(A)425 (B)426 (C)435 (D)436

<解析>

假設影印 x 張

$$x \times 1 > 500 \times 1 \times 0.85$$

$$\therefore x > 425, \quad \text{至少 426 張，選 B。}$$

17. 計算 $\frac{(10^4 + 64)(18^4 + 64)(26^4 + 64)}{(6^4 + 64)(14^4 + 64)(22^4 + 64)}$ 之值為何？(A) $\frac{197}{5}$ (B) $\frac{199}{5}$ (C) $\frac{201}{5}$ (D) $\frac{203}{5}$

<解析>

$$x^4 + 64 = (x^2 + 8)^2 - 16x^2 = (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 = (x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8) = [x(x+4) + 8][x(x-4) + 8]$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{(10 \times 14 + 8)(10 \times 6 + 8)}{(10 \times 6 + 8)(6 \times 2 + 8)} \cdot \frac{(18 \times 22 + 8)(18 \times 14 + 8)}{(14 \times 18 + 8)(14 \times 10 + 8)} \cdot \frac{(26 \times 30 + 8)(26 \times 22 + 8)}{(26 \times 22 + 8)(22 \times 18 + 8)}$$

$$= \frac{26 \times 30 + 8}{6 \times 2 + 8} = \frac{788}{20} = \frac{197}{5}, \quad \text{選 A。}$$

18. 正整數 a 、 x 、 y 滿足 $\sqrt{a - 2\sqrt{6}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ ，則 a 之最大值為多少？(A)6 (B)7 (C)8 (D)9

<解析>

$$\sqrt{a - 2\sqrt{6}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \rightarrow a - 2\sqrt{6} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$\therefore a - 2\sqrt{6} = x + y - 2\sqrt{xy}$$

$$\therefore a = x + y \text{ 且 } xy = 6 \text{ (只考慮正整數)}$$

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

$$a = x + y = 1 + 6 = 7 \text{ 或 } a = x + y = 2 + 3 = 5$$

最大值=7，選 B。

19. 已知 $35^2 = 1225$, $45^2 = 2025$, $55^2 = 3025$, $65^2 = 4225$, $75^2 = 5625$, 設 $a = \sqrt{20152015}$, 則 a 的正平方根較接近下列哪一個數? (A)40 (B)50 (C)60 (D)70

<解析>

令 a 的正平方根: $\sqrt{a} = x \rightarrow a = x^2 = \sqrt{20152015}$

$$\therefore x^4 = 20152015$$

當 $x = 40$, $x^4 = 2560000$

當 $x = 50$, $x^4 = 6250000$

當 $x = 60$, $x^4 = 12960000$

當 $x = 70$, $x^4 = 24010000$, 選 D。

20. If $x = 1 + 2\sqrt{3}$ and $y = 1 - \sqrt{3}$, then $x^2 - 1 - 4y^2 + 4y = \underline{\hspace{2cm}}$. (A) $4\sqrt{3}$ (B) $6\sqrt{3}$ (C) $8\sqrt{3}$
(D) $10\sqrt{3}$

<解析>

$$x = 1 + 2\sqrt{3} \rightarrow x^2 = (1 + 2\sqrt{3})^2 = 1 + 4\sqrt{3} + 12 = 13 + 4\sqrt{3}$$

$$y = 1 - \sqrt{3} \rightarrow y^2 = (1 - \sqrt{3})^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{原式} = 13 + 4\sqrt{3} - 1 - 4(4 - 2\sqrt{3}) + 4(1 - \sqrt{3}) = 12 + 4\sqrt{3} - 16 + 8\sqrt{3} + 4 - 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} , \text{選 C。}$$

21. 求 $(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{4^2})(1 - \frac{1}{5^2}) \dots (1 - \frac{1}{100^2}) = ?$ (A) $\frac{101}{200}$ (B) $\frac{99}{200}$ (C) $\frac{49}{100}$ (D) $\frac{59}{100}$

<解析>

$$\text{原式} = (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{100})(1 + \frac{1}{100})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{99}{100} \times \frac{101}{100} = \frac{101}{200} , \text{選 A。}$$

22. 若 $2a^2 + b^2 + c^2 - 12a - 8b - 10c + 59 = 0$, 其中 a 、 b 、 c 為 \triangle 之三邊, 求 \triangle 面積是多少? (A)4 (B)8
(C)6 (D)12

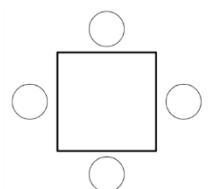
<解析>

$$\text{原式} = 2(a^2 - 6a + 9) + (b^2 - 8b + 16) + (c^2 - 10c + 25) = 0$$

$$\therefore 2(a-3)^2 + (b-4)^2 + (c-5)^2 = 0$$

$$\therefore a = 3 \text{、} b = 4 \text{、} c = 5 \rightarrow \text{直角}\triangle$$

$$\text{面積} = 3 \times 4 \div 2 = 6 , \text{選 C。}$$



23. 佩佩一家四口到餐廳用餐，其餐桌座位如右圖所示，若四人隨機入座，則佩佩坐在媽媽對面的機率是多少？(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

<解析>

四個座位 A、B、C、D

若 A 座位對面 C 座位；B 座位對面 D 座位

先選座位： $4 \times 2 \times 1 \times 1 = 8$

任意坐： $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

坐對面的機率 = $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ ，選 C

<另解>

媽媽坐定位置後，佩佩有 3 種選擇，只有一種選擇會坐到媽媽的對面

故機率 = $\frac{1}{3}$

24. 阿彬到市場買水果，其身上帶錢可以買 12 個柳丁或 28 個蘋果或 42 個奇異果，如今三種水果都買，每種數量都相等，問他應該各買幾個？(A)9 (B)10 (C)7 (D)8

<解析>

$12 \times \triangle = 28 \times \square = 42 \times \star$ 且 $[12, 28, 42] = 84$

$\triangle = 7$ ， $\square = 3$ ， $\star = 2$

則 $84 \div (7+3+2) = 7$ ，各買 7 個，選 C。

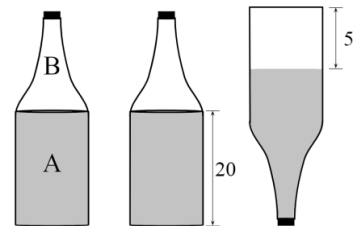
25. A bottle of beverage has two parts A and B. Part A is a cylinder, as shown in the picture. Now the bottle contains some drinks. The height of the beverage is 20 cm when placed. The height of the remaining part is 5 cm when it is reversed. If the volume of the beverage bottle is 30000 cm^3 . What is the volume of the existing beverage in the bottle?
(A)20000 (B)22000 (C)24000 (D)26000

<解析>

假設 A 部分的底面積 = $x \text{ cm}^2 \rightarrow$ A 體積 $20x \text{ cm}^3$ ，B 體積 $5x \text{ cm}^3$

$20x + 5x = 30000$ ， $x = 1200$

則 $1200 \times 20 = 24000$ ，選 C。



二、計算題(每題 25 分，共 50 分，請寫出簡要過程，可得過程分)

1. 右圖是射飛鏢三個同心圓(圓心是 O)，圓半徑分別是 1、2、3，得分如表，A 區表示半徑 1 之圓的內部及半徑為 1 的圓周，B 區表示半徑 1、2 之圓的環狀部分及半徑 2 的圓周，C 區表示半徑 2、3 之圓的環狀部分及半徑 3 的圓周，小雅射了 10 次 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、……、 P_{10} ，且 $\overline{OP_1} = \sqrt{1}$ ， $\overline{OP_2} = \sqrt{2}$ ， $\overline{OP_3} = \sqrt{3}$ ，……， $\overline{OP_{10}} = \sqrt{10}$ ，請問：

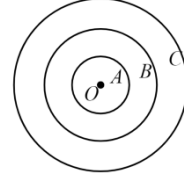
(1) 有哪些點射在 C 區? (2) 她射 10 次的得分是多少分?

<解析>

$$(1) 2 < \overline{OP_n} \leq 3 \rightarrow \sqrt{4} < \overline{OP_n} \leq \sqrt{9}$$

$$\therefore \overline{OP_n} = \sqrt{5}、\sqrt{6}、\sqrt{7}、\sqrt{8}、\sqrt{9}$$

表示 P_5 、 P_6 、 P_7 、 P_8 、 P_9 這五點射在 C 區



	得分
A	5 分
B	3 分
C	1 分

$$(2) \overline{OP_1} = \sqrt{1} \rightarrow P_1 \text{ 在 A 區，則 } 5 \times 1 = 5$$

$$\overline{OP_2} = \sqrt{2} \rightarrow P_2 \text{ 在 B 區、}\overline{OP_3} = \sqrt{3} \rightarrow P_3 \text{ 在 B 區、}\overline{OP_4} = \sqrt{4} \rightarrow P_4 \text{ 在 B 區}$$

$$\text{則 } 3 \times 3 = 9$$

$$\text{C 區有 5 個點，} 1 \times 5 = 5$$

$$\text{共得分 } 5 + 9 + 5 = 19 \text{ 分。}$$

2. 設 x 、 y 、 z 為整數，且 $x + y + z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 為整數，試證： $xy + yz + zx$ 必為偶數。

<解析>

$$\textcircled{1} \text{ 令 } x + y + z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k \text{ 為整數}$$

$$\text{則 } (x + y + z) - k = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\therefore (x + y + z)^2 - 2k(x + y + z) + k^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) - 2k(x + y + z) + k^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\rightarrow k^2 = 2[k(x + y + z) - (xy + yz + zx)]，k^2 \text{ 為偶數}$$

$$\therefore k \text{ 必為偶數}$$

$$\textcircled{2} \text{ 令 } k = 2m，m \in \mathbb{Z}，\text{則 } k^2 = 4m^2$$

$$\therefore 4m^2 = 2[k(x + y + z) - (xy + yz + zx)]$$

$$\therefore 2m^2 = 2m(x + y + z) - (xy + yz + zx)$$

$$\therefore xy + yz + zx = 2m[(x + y + z) - m] \rightarrow xy + yz + zx \text{ 必為偶數。}$$