



第十六屆IMC國際數學競賽 台灣區初賽
16th International Mathematics Primary Contest (Taiwan)

國中二年級組

請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

- (A)1. 小雅將一段繩子放在數線上測量，發現繩子一端在刻度-15 的地方，另一端在刻度 23 的地方，若她移動繩子後發現，在某個位置時，繩子兩端在數線上的刻度剛好是相反數，請問最後這兩數為何?(A)-19，19 (B)-8，8 (C)-4，4 (D)-2，2

<解析>

$$\text{新原點} = (-15 + 23) \div 2 = 4$$

$$23 - 4 = 19, -15 - 4 = -19$$

$$\text{後來兩數} = 19、-19$$

- (D)2. 69 度 C 咖啡店一杯咖啡 40 元，推出三種優惠方案任君挑選：

方案一：每杯飲料打八折

方案二：買三杯送一杯

方案三：每購買兩杯，第一杯原價，第二杯半價

若品蓉按照三種優惠方案分別購買 14 杯咖啡，則下列敘述何者正確？

(A)方案一優惠最多

(B)方案二與方案三的優惠價相同

(C)採用方案二，可以優惠 140 元

(D)不論採用何種方案，至少可以優惠 112 元

<解析>

$$\text{方案一：} 40 \times 0.8 \times 14 = 448$$

$$\text{方案二：} 14 = 4 + 4 + 4 + 2$$

$$40 \times 9 + 40 \times 2 = 360 + 80 = 440$$

$$\text{方案三：} 7 \times 40 + 7 \times 40 \times 0.5 = 280 + 140 = 420$$

$$40 \times 14 - 448 = 560 - 448 = 112, \text{選 D。}$$

- (A)3.為避免投資客炒房，政府想要開徵奢侈稅，若購買非自用住宅，在一年內轉移，則課稅 15%，在一至二年移轉，則課稅 10%，已知阿德今年二月在新北市購買第 2 間豪宅，但在今年 12 月以 2 億 4000 萬賣掉，那麼阿德要繳交奢侈稅多少元?(用科學記號表示)
(A) 3.6×10^7 (B) 2.4×10^7 (C) 2.8×10^7 (D) 1.3×10^7

<解析>

$$240000000 \times 0.15 = 36000000 = 3.6 \times 10^7$$

選 A。

- (B)4.設有一個五位數 $a2b4c$ ，有質因數 3、11，則下列敘述何者錯誤?
(A)新三位數 abc 一定有質因數 3
(B)新三位數 abc 一定有質因數 11
(C)新五位數 $24abc$ 一定有質因數 3
(D)新五位數 $c4b2a$ 一定有質因數 11

<解析>

(A)新三位數 abc

$\therefore a+b+c$ 也是 3 的倍數

→ 一定有質因數 3

(B)新三位數 abc

無法得知 $a+c-b$ 的值

→ 不一定有質因數 11

(C)新五位數 $24abc$

$\therefore 2+4+a+b+c = a+b+c+6$

→ 一定有質因數 3

(D)新五位數 $c4b2a$

$\therefore (c+b+a)-(4+2) = (a+b+c)-6$

→ 一定有質因數 11

選 B。

- (A)5. There are four people in Sam's family. The age of Sam's parents differs 2 years old. Brother and sister are so, too. Sam birthed when mother was 26 years old. Two years later, my sister birthed. The birthday of the family was all in June. Father bought a birthday cake to celebrate. He took a candle in the cake and the digit of the candle is 100. It stood for the sum of the family's age. How old is Sam now?
(A)12 (B)11 (C)10 (D)13

翻譯: Sam 家裡有四個人。Sam 的父母年齡相差 2 歲。哥哥和妹妹也是如此。當媽媽 26 歲時, Sam 出生了。兩年後, 妹妹才出生。這個家庭的生日都在六月份。父親買了一個生日蛋糕來慶祝。他在蛋糕上點了一根蠟燭, 蠟燭的數字是 100。它代表了家庭年齡的總和。現在 Sam 年齡是多少歲?

<解析>

假設妹妹 x 歲, Sam $(x+2)$ 歲, 媽媽 $(x+2+26)$ 歲, 爸爸 $(x+2+26+2)$ 歲

$$x+x+2+x+2+26+x+2+26+2=100$$

$$4x=40, x=10$$

Sam $=10+2=12$, 選 A。

- (B)6. 小墨和凱欣玩猜硬幣遊戲, 遊戲規則如下:

兩人各準備一些五元及十元的硬幣放在口袋中, 開始前每人各掏出若干枚硬幣緊握手上, 開始後輪流猜測兩人手中握有的硬幣總錢數, 猜中的人就可以把兩人手中握有的硬幣全部拿走。

若小墨第一次手中握有 5 枚五元硬幣和 2 枚十元硬幣, 並猜兩人手中握有的硬幣共 80 元, 結果猜中了, 凱欣此次手中的硬幣總數可能是多少枚? (A)3 (B)4 (C)8 (D)9 枚

<解析>

假設有 x 枚 5 元硬幣及 y 枚十元硬幣

$$5x+10y=80-25-20 \rightarrow 5x+10y=35$$

$$(x, y)=(1, 3)、(3, 2)、(5, 1)、(7, 0)$$

故 $x+y=4、5、6、7$, 選 B。

- (C)7.某電信計費方式如下表：今天林老師每日大約使用手機 1 分鐘，若每月以 30 天計算，試問哪一型的收費最便宜？
 (A)A 型 (B)B 型 (C)C 型 (D)一樣便宜

類型	A 型	B 型	C 型
月租(基本費)	88 元	188 元	288 元
免費通話費(秒)	300 秒	600 秒	1200 秒
超過免費秒數計算	每秒 0.25 元	每秒 0.2 元	每秒 0.15 元

<解析>

$$30 \times 60 = 1800 (\text{秒})$$

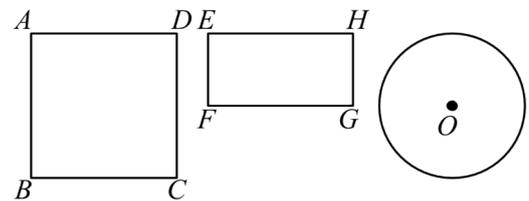
$$\text{A 型: } 88 + (1800 - 300) \times 0.25 = 463 \text{ 元}$$

$$\text{B 型: } 188 + (1800 - 600) \times 0.2 = 428 \text{ 元}$$

$$\text{C 型: } 288 + (1800 - 1200) \times 0.15 = 378 \text{ 元}$$

∴C 型收費最便宜，選 C。

- (B)8.如圖，正方形 ABCD、長方形 EFGH 及圓 O，三個周長都相等，且 $\overline{EF}:\overline{EH}=1:2$ ，則正方形 ABCD 面積：長方形 EFGH 面積：圓 O 面積的比是多少？
 (A) $9\pi:8\pi:24$ (B) $9\pi:8\pi:36$ (C) $8:9:36\pi$ (D) $8:9:36$



<解析>

假設周長都是 x

$$\overline{AB} = \frac{x}{4} \rightarrow \text{正方形面積} = \frac{x^2}{16}$$

$$\overline{EF}:\overline{EH}=1:2, \overline{EF} = \frac{1}{6}x, \overline{EH} = \frac{1}{3}x \rightarrow \text{長方形面積} = \frac{x^2}{18}$$

$$\text{圓的半徑} = \frac{x}{2\pi} \rightarrow \text{圓的面積} = \frac{x^2}{4\pi}$$

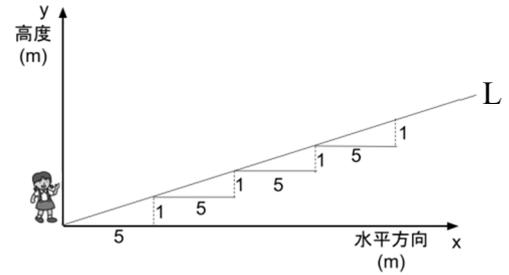
$$\frac{x^2}{16} : \frac{x^2}{18} : \frac{x^2}{4\pi} = 9\pi : 8\pi : 36, \text{選 B。}$$

- (A)9.如圖，小芬沿著小山坡往上跑，若將直線 L 寫成函數 $y=ax+b$ ，則當小芬沿著水平移動 50 公尺時，此時她離地面多少公尺？
 (A)10 (B)12 (C)20 (D)25 公尺

<解析>

$y=ax+b$ 通過 $(0, 0)$ ， $(5, 1)$ ， $(10, 2)$ ，.....

$a=\frac{1}{5}$ ， $b=0$ ， $y=\frac{1}{5}x \rightarrow y=\frac{1}{5} \times 50 = 10$ ，選 A。



- (B)10. Today is father and son's birthday. Father's age is 26 more than son's. Father's age is prime number(質數). Their conversation is below.
 Son: My age is three times no greater than yours.
 Father: Twenty years later, your age is two times greater than mine.
 How old is father now? (A) 35 (B)37 (C)41 (D)43 years old

翻譯:今天是父子的生日。父親的年齡比兒子多 26 歲。父親的年齡是質數。他們的談話如下。

兒子：我的年齡的三倍不大於你的年齡。

父親：二十年後，你的年齡的兩倍大於我的年齡。

現在父親幾歲了？

<解析>

$$3(x-26) \leq x \dots\dots\dots ①$$

$$2(x-26+20) > x+20 \dots\dots\dots ②$$

由①得 $x \leq 39$ ，由②得 $x > 32$

$$\therefore 32 < x \leq 39, x=33、34、35、36、37、38、39$$

且 x 是質數 $\rightarrow x=37$ ，選 B。

- (B)11.怡靜生日了，有 x 位朋友合買蛋糕和食物要幫她慶生，後來又有 2 位朋友加入，於是每個人的平均花費比原來少了 36 元。今又有另 2 位朋友加入，則每個人的平均花費會比原本 x 個人的平均花費低 60 元，則該次慶生會總共花費多少元？
(A)1200 (B)1440 (C)1520 (D)1800 元

<解析>

假設 x 人參加，一人花費 y 元

$$xy=(x+2)(y-36)$$

$$xy=(x+4)(y-60)$$

$$\rightarrow x=8, y=180$$

共花費 $=8 \times 180 = 1440$ ，選 B。

- (A)12.若 a 、 b 都是正整數，且 $(a+b)(a-b)=221$ ，則 a^2+ab-b^2 的最小值是多少？(A)251 (B)265 (C)442 (D)1221

<解析>

$$(a+b)(a-b)=221 \times 1$$

$$a+b=221$$

$$a-b=1$$

$$\rightarrow a=111, b=110$$

$$a^2+ab-b^2=a^2-b^2+ab=221+110 \times 111$$

$$(a+b)(a-b)=13 \times 17$$

$$a+b=17$$

$$a-b=13$$

$$\rightarrow a=15, b=2$$

$$a^2+ab-b^2=a^2-b^2+ab=221+30=251$$

最小值 $=251$ ，選 A。

- (A)13.有一道數學題:「兩個一元二次式 A、B，B 為 $3x^2 + 2x - 4$ ，試求 $2A + 3B = ?$ 」小智誤將 $3B$ 看成 $6B$ ，如果求出答案為 $20x^2 + 14x - 26$ ，則 $2A + 3B$ 的正確答案為何?
 (A) $11x^2 + 8x - 14$ (B) $11x^2 - 8x + 14$ (C) $12x^2 + 9x - 11$ (D) $12x^2 - 9x + 11$

<解析>

$$6B = (3x^2 + 2x - 4) \times 6 = 18x^2 + 12x - 24$$

$$20x^2 + 14x - 26 - (18x^2 + 12x - 24) = 2x^2 + 2x - 2$$

$$2x^2 + 2x - 2 + (3x^2 + 2x - 4) \times 3 = 11x^2 + 8x - 14$$

- (A)14.筱筠將一個長方形的紙(其中一邊長是 $x + 4$)，如圖，切掉一個長方形及一個正方形，剩下的紙的面積是 $3x^2 + 12x + 14$ ，那麼原長方形紙另一邊長是多少? (A) $3x + 2$ (B) $2x + 3$ (C) $3x - 2$ (D) $2x - 3$

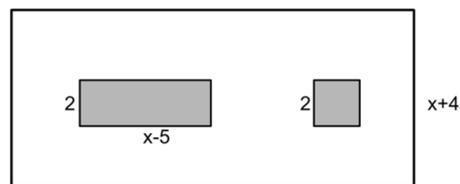
<解析>

$$(x - 5) \times 2 + 2 \times 2 = 2x - 6$$

$$3x^2 + 12x + 14 + 2x - 6 = 3x^2 + 14x + 8$$

$$3x^2 + 14x + 8 \div (x + 4) = 3x + 2$$

選 A。



- (C)15. The taxi fare rate for general time in Tainan City: \$70 for the first, after 1.5 kilometers, the taxi meter is added \$5 for each additional 300 meters. Today, Amber took a taxi and got off the taxi to pay the driver \$200. She also found the change. If Amber took a taxi by meter tick away for x times, what was wrong with the following description?
- (A) The distance is 9 kilometers at most.
(B) The driver should at least find \$5 for Amber.
(C) It has jumped up to 26 times.
(D) Amber pays $\$(70+5x)$.

翻譯:台南市一般時段計程車費率:70元起跳,1.5公里後,每300公尺跳錶一次加5元。今天Amber坐計程車,下車付給司機200元,還找回零錢,假設Amber坐計程車共跳 x 次錶,則下列敘述何者錯誤?

- (A) Amber 這趟車程最遠為9公里。
(B)司機最少應找給Amber 5元。
(C) Amber 這趟車最多跳了26次錶。
(D) Amber 應付 $(70+5x)$ 元車資。

<解析>

$$70+5x < 200$$

$$x < 26 \rightarrow x \text{ 最大整數為 } 25$$

最多跳25次錶

$$\text{最多付 } 70+5 \times 25=195, 200-195=5, \text{ 至少找回 } 5 \text{ 元}$$

$$\text{最遠路程 } 1.5+0.3 \times 25=1.5+7.5=9 \text{ 公里}$$

選C。

- (D)16. 設男工 4 人的工作量等於女工 5 人的工作量，今有一工程，女工 30 人做 60 日可完工。欲使這項工程於 20 日內完工，則除女工 30 人外，應加派多少名男工？(A)38 (B)42 (C)46 (D)48 名

<解析>

假設工作人數為 x 人，工作日數為 y 日

$$xy=k(k \neq 0)$$

$$30 \times 60 = k, k = 1800$$

$$\text{則 } xy = 1800$$

$$\therefore y = 20$$

$$\therefore x = 1800 \div 20 = 90$$

$$(90 - 30) \div 5 \times 4 = 48, \text{ 選 D。}$$

- (A)17. 如圖，坐標平面上有三點 $(-6, -2)$ 、 $(2, -1)$ 、 $(1, 2)$ ，若有第四點和此三點恰好形成一個菱形，則此第四點的坐標可能是下列何者？
(A) $(9, 3)$ (B) $(8, 4)$ (C) $(-7, 1)$ (D) $(-5, -5)$

<解析>

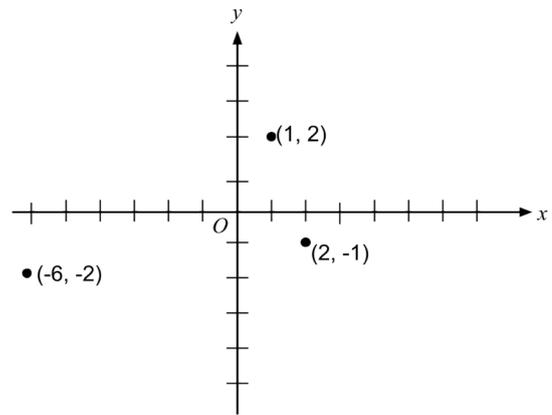
令 $P(1, 2)$ $Q(-6, -2)$ $R(2, -1)$ $S(x, y)$

\therefore 四邊形 PQRS 為菱形

$$\therefore \overline{PR} \text{ 的中點} = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{2-1}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \overline{QS} \text{ 的中點} = \left(\frac{-6+x}{2}, \frac{-2+y}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\rightarrow x = 9, y = 3$$



- (B)18. 一架維持等速度飛行的飛機，上午 10:00 在地圖上的坐標位置為 $(4, 2)$ ，下午 4:00 飛至 $(9, 7)$ 的位置，若汶萊在地圖上坐標位置為 $(19, 17)$ ，則何時會抵達汶萊？
(A) 晚上 11:00 (B) 隔天凌晨 4:00
(C) 隔天凌晨 3:00 (D) 隔天凌晨 2:00

<解析>

$$16:00 - 10:00 = 6 \text{ 小時}$$

$(4, 2) \rightarrow (9, 7)$ x 增加 5 單位， y 增加 5 單位

$(4, 2) \rightarrow (19, 17)$ x 增加 15 單位， y 增加 15 單位

$$6 \times 3 = 18$$

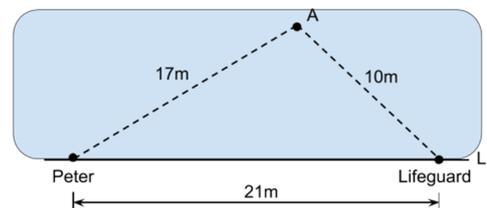
10:00+18:00=28:00 → 明天上午 4:00，選 B。

- (B)19. 設 x 為整數，且符號 $[\sqrt{x}]$ 表示 \sqrt{x} 的整數部分， $[\sqrt{5}]=2, [\sqrt{10}]=3$ ，
若 $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\dots+[\sqrt{n}]=46$ ，則 $n=?$
(A)16 (B)18 (C)20 (D)22

<解析>

$[\sqrt{1}]、[\sqrt{2}]、[\sqrt{3}]$ 整數部分為 1
 $[\sqrt{4}]、\dots、[\sqrt{8}]$ 整數部分為 2
 $[\sqrt{9}]、\dots、[\sqrt{15}]$ 整數部分為 3
 $[\sqrt{16}]、\dots、[\sqrt{24}]$ 整數部分為 4
 $1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 7 = 34$
 $46 - 34 = 12$
 $12 \div 4 = 3 \rightarrow n = 18$ ，選 B。

- (A)20. Right picture is one part of the swimming pool. Straight line L is the poolside. Peter swims at 17m and his foot cramps at A place. A lifeguard(救生員) leaves him 21m far. He swims 10 m and saves Peter at A place. If a lifeguard wants to bring him at the poolside of the shortest distance, how far is the distance?
(A)8 (B)8.5 (C)9 (D)9.5 m



翻譯:右圖是游泳池的一部分。直線 L 是池畔。彼得游 17 公尺到了 A 處，突然腳抽筋。救生員離他 21 公尺遠。他游了 10 公尺，拯救彼得在 A 處。如果救生員想把他帶到最短距離的游泳池邊，距離會有多遠？

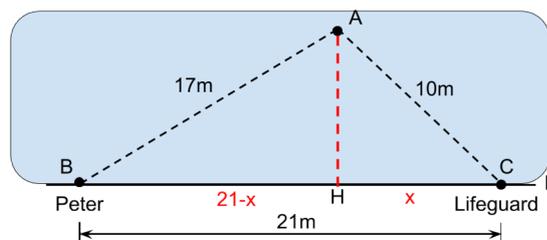
<解析>

假設 $\overline{CH} = x$ ， $\overline{BH} = 21 - x$

$$17^2 - (21 - x)^2 = 10^2 - x^2$$

$$x = 6$$

$$\overline{AH} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$
，選 A。



- (B)21.要多少人以上才能保證其中至少有 3 人生日相同?
 (A) $365 \times 2 + 1$ (B) $366 \times 2 + 1$ (C) $365 \times 2 + 3$ (D) $366 \times 2 + 3$ 人

<解析>

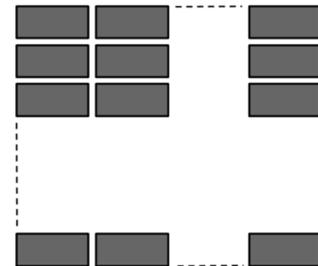
$1/1$ 、 $1/2$ 、.....、 $1/31$ ， $2/1$ 、 $2/2$ 、.....、 $2/29$ ， $3/1$ 、.....， $12/31$
 符合 366 天生日的人各要 2 人
 再多 1 人就會有 3 人生日相同
 → $366 \times 2 + 1$ ，選 B。

- (A)22.已知 $x \div y \div z = 3$, $x \div y - z = 10$, $x - y = 28$ ，則 $x + y + z = ?$
 (A)37 (B)36 (C)35 (D)34

<解析>

- ①令 $x \div y = t \rightarrow t \div z = 3$ ， $t = 3z$ ； $t - z = 10$ ， $t = z + 10$ 。得 $3z = z + 10$ ， $z = 5$
 ② $x \div y = 15$ ，且 $x - y = 28 \rightarrow 28 \div (15 - 1) = 2$ ， $y = 2$ ， $x = 30$
 ③ $30 + 2 + 5 = 37$ ，選 A。

- (A)23.用 5 公分寬及 8 公分長的長方形紙片，
 間隔 1 公分鋪成右邊之正方形，問
 最少需要多少張紙片?
 (A)6 (B)24 (C)40 (D)54 張



<解析>

$[5+1, 8+1] = [6, 9] = 18$
 $\frac{18 \times 18}{6 \times 9} = 6$ ，選 A。

- (D)24.有王、趙、李三位老師帶著小華、小明、小剛三個學生去參加數學競賽，說巧不巧，每位老師都比自己帶的學生大 21 歲，已知李老師與小華年齡和為 44 歲，王老師與小華年齡和為 42 歲，且王老師比小明大 19 歲，求王、趙、李三位老師帶的學生分別是誰？
 (A)小華是王老師帶的 (B)小明是趙老師帶的
 (C)小剛是李老師帶的 (D)小華是趙老師帶的

<解析>

因為每位老師都比自己的學生大 21 歲

所以每位老師與自己的學生之和應該是奇數

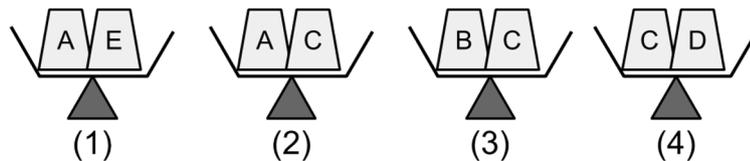
→小華與李老師、王老師的年齡和都是偶數

∴小華是趙老師帶的

且王老師比小明大 19 歲

∴小明是李老師帶的，而小剛是王老師帶的，選 D。

- (C)25.把重量相同的 26 顆玻璃彈珠分裝在 A、B、C、D、E 五個袋子裡(袋子的重量不計)，每袋至少裝 2 顆球，且各袋中數量互不相同，秤重時，若玻璃彈珠達到 11 顆以上，則超重警鈴就會響，下面秤了 4 次：



其中第(1)、(3)、(4)次警鈴都響，只有第(2)次未響，則顆數 $A+C+E-B-D=?$ (A)10 (B)11 (C)12 (D)13 顆

<解析>

$$A+E \geq 11, B+C \geq 11, C+D \geq 11$$

$$A+C < 11$$

當 $C=9, A=1$ (不合)

當 $C=8, A=2, E=9, B=3, D=4$ (合計 26 顆)

或 $C=8, A=2, E=9, B=4, D=3$

∴ $A+C+E-B-D=2+8+9-3-4=12$ ，選 C。

二、計算題(20分/20分/10分，共50分)

1. 大華去水果批發市場購買香蕉，其價格如下：

購買數量	不超過 20 公斤	20 公斤以上， 不超過 40 公斤	40 公斤以上
每公斤價格	60 元	50 元	40 元

已知大華一共購買兩次，總計 50 公斤，且第二次的重量大於 30 公斤，共付款 2640 元，試問大華第一次買了多少公斤的香蕉？

<解析>

假設第一次買 x 公斤，第二次 $(50-x)$ 公斤

且 $50-x > 30$ ， $20 > x$ ，第一次每公斤 60 元

第二次介於 30~40 公斤

$$\therefore 60x + (50-x) \times 50 = 2640$$

$$10x = 140, x = 14$$

第二次大於 40 公斤

$$\therefore 60x + (50-x) \times 40 = 2640$$

$$20x = 640, x = 32 \text{ (不合)}$$

第一次購買 14 公斤

2. It is map of Dora's house near. Someday, Dora buys a book and walks along $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ (the shortest distance). If $\overline{AB} = 5$ km, $\overline{BC} = 6$ km, and $\overline{CD} = 8$ km. $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. The shortest distance from D to A is _____ km.

翻譯：右圖是 Dora 家附近的地圖，某天 Dora 沿著 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 順序買一本書，發現 $\overline{AB} = 5$ 公里， $\overline{BC} = 6$ 公里， $\overline{CD} = 8$ 公里，且 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ，從全聯(D點)回家最短的路徑是多少公里？

<解析>

$$a^2 + b^2 = 25$$

$$b^2 + c^2 = 36$$

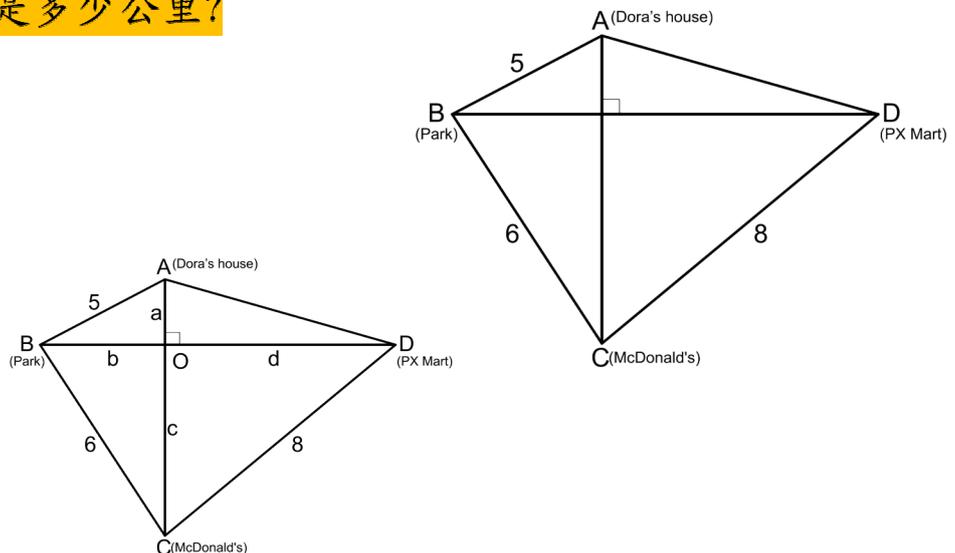
$$d^2 + c^2 = 64$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 89$$

$$a^2 + 36 + d^2 = 89$$

$$\rightarrow a^2 + d^2 = 53$$

$$\overline{AD} = \sqrt{53}$$



3. (1)找規律 $\langle 2, 3 \rangle = 9$, $\langle 3, 4 \rangle = 17$, $\langle 4, 5 \rangle = 27$, $\langle 5, 6 \rangle = 39$, 則 $\langle 6, 7 \rangle = ?$

(2)自己出題並解答

<解析>

$$(1) \langle 2, 3 \rangle = 2 \times 3 + 3 = 9$$

$$\langle 3, 4 \rangle = 3 \times 4 + 5 = 17$$

$$\langle 4, 5 \rangle = 4 \times 5 + 7 = 27$$

$$\langle 5, 6 \rangle = 5 \times 6 + 9 = 39$$

$$\langle 6, 7 \rangle = 6 \times 7 + 11 = 53$$

(2) 略