第十六屆IMC國際數學競賽 台灣區初賽

16th International Mathematics Primary Contest (Taiwan)

高中二年級組

請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

(B)1. 在職業棒球賽中，ERA 值是了解一個投手表現的重要統計數值，其計算方式如下:若此投手共主投 n 局，其總責任失分為 E，則 ERA 值為$\frac{E}{n}\times 9$。有一位投手在之前的比賽共主投 90 局，且這 90 局他的 ERA 值為 3.2，最新的一場比賽中，此投手主投 6 局無責任失分，則打完這一場比賽後，此投手的 ERA 值成為

(A)2.9 (B)3.0 (C)3.1 (D)3.2

<解析>

ERA=$\frac{E}{n}\times 9$ ➔ $3.2=\frac{E}{90}\times 9$，E=32

又投 6 局無責任失分，ERA=$\frac{32}{90+6}\times 9=3$，選 B。

(A)2.設 $f(x)=px^4+qx^3+rx^2+sx+t$ 為一四次多項式，以 $(x-1)^3$ 除之得餘式為 3，以 $x-2$ 除之得餘式為 6，以 $x+2$ 除之得餘式為 138，則 p+q+r-s-t=?

(A)5 (B)-5 (C)6 (D)-6

<解析>

設 $f(x)=(ax+b)(x-1)^3+3$

$f(2)=(2a+b)(2-1)^3+3=6$

$f(-2)=(-2a+b)(-2-1)^3+3=138$

2a+b=3

-2a+b=-5

➔a=2，b=-1

$f(x)=(2x-1)(x-1)^3+3=2x^4-7x^3+9x^2-5x+4$

p+q+r-s-t=2-7+9+5-4=5，選 A。

(**C**)3. 某火力發電廠燒煤發電，會產生大量的空氣汙染，若精算出要清除 r%的空氣汙染，每度電需成本 C 元，$C=\dfrac{4r}{100-r}$，$0\leqq r<100$，已知該電廠清除空氣污染的成本不大於 4 元，試求 r 的最大值?
(A)30　(B)60　(C)50　(D)40

<解析>

$C=\dfrac{4r}{100-r}\leq 4$，$r\leq 50$

選 C。

(**C**)4. $\cos^4 22.5°+\cos^4 67.5°+\cos^4 112.5°+\cos^4 157.5°=?$
(A) $\frac{1}{2}$　(B)1　(C) $\frac{3}{2}$　(D)2

<解析>

$\because \cos 157.5°=\cos(180°-22.5°)=-\cos 22.5°$

$\Rightarrow \cos^4 157.5°=\cos^4 22.5°$

同理 $\cos^4 112.5°=\cos^4 67.5°$

原式$=2(\cos^4 22.5°+\cos^4 67.5°)=2[\dfrac{(1+\cos 45°)^2}{4}+\dfrac{(1+\cos 135°)^2}{4}]$

$=2[\dfrac{(1+\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{4}+\dfrac{(1-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{4}]=\dfrac{3}{2}$，選 C。

(**B**)5. For all real number x, $\dfrac{2x^2+ax+2}{x^2-x+1}\leq 3$ is true. The range of real number a is________.
(A) $-4\leq a\leq -2$ (B) $-5\leq a\leq -1$ (C) $2\leq a\leq 4$ (D) $1\leq a\leq 5$

<解析>

$\because x^2-x+1>0$ 恆真(判別式 D=1-4=-3<0)

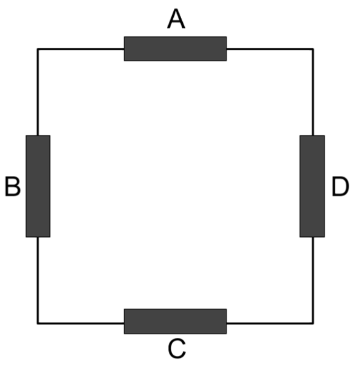
$\therefore 2x^2+ax+2\leq 3(x^2-x+1)$

$\Rightarrow x^2-(a+3)x+1\geq 0$

$\therefore$D$=(a+3)^2-4\leq 0 \Rightarrow (a+3+2)(a+3-2)\leq 0 \Rightarrow -5\leq a\leq -1$，選 B。

(**B**)6.一室有四門，甲乙兩人由不同門進入再由不同門出去，且各人不由同一門進出，則有多少種不同的走法?

(A)72 (B)84 (C)96 (D)108 種



<解析>

進入:甲有 4 種，乙有 3 種

共有 12 種

出去:甲由 A 進入，乙由 B 門進入

①甲由 B 門出去，則乙出去有 3 種方法

②甲不由 B 門出去，則甲出去有 2 種方法，乙出去有 2 種方法

∴出去有 2×2=4 種，4+3=7 種

∴12×7=84 種，選 B。

(**B**)7.設 $a=2^{26}$，$b=3^{16}$，已知 $\log a=7.8260$，$\log b=7.6336$，下列何者正確?

(A)a 為 7 位數 (B)b 為 8 位數 (C)ab 為 14 位數 (D)ab 為 15 位數

<解析>

∵ $\log a=7.8260$，$\log b=7.6336$

∴a、b 都是 8 位數

∵ $\log ab=\log a+\log b=7.8260+7.6336=15.4596$

∴ab 為 16 位數

(**C**)8.從一副撲克牌中(共 52 張，其中有 4 種花色，每種花色 13 種數字)，任選 5 張，則 5 張牌為 FULL HOUSE 的情形(例如:AAAKK，22233)，共有多少種? (A)4056 (B)2028 (C)3744 (D)1872 種

<解析>

$C_1^{13}\times C_3^4\times C_1^{12}\times C_2^4=13\times4\times12\times6=3744$，選 C。

(**A**)9.不等式$|x-1|+|x-3|<6$的解為何?

(A)-1<x<5　(B)-1<x<3　(C)x>5 或 x<-1　(D)x>3 或 x<-1

<解析>

當 x<1，-(x-1)-(x-3)<6，-2x<2，x>-1

➔-1<x<1

當 1≦x<3，(x-1)-(x-3)<6，2<6(恆真)

➔1≦x<3

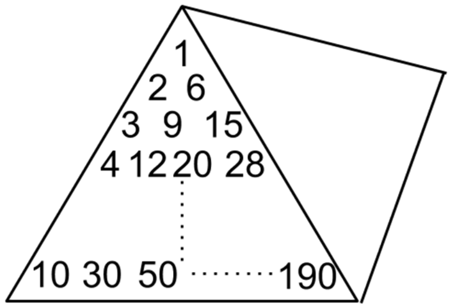
當 x≧3，(x-1)+(x-3)<6，2x<10，x<5

➔3≦x<5

則-1<x<5，選 A。

(**C**)10. Arrange 55 numbers on front side of the pyramid, and the sum of all the numbers on this plane is S, find S=______.

(A)5025 (B)4025 (C)3025 (D)2025



<解析>

設第 k 列的所有數之和為a_k

➔ $a_k = k + 3k + 5k + \dots + (2k-1)k = \dfrac{k[k+(2k-1)k]}{2} = k^3$

$$S = \sum_{k=1}^{10} k^3 = \left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2 = 3025$$

(**A**)11. 在平面上有一正方形 ABCD，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$的延長線分別交直線 L 於 P、Q、R、S。已知$\overline{PR}=3$，$\overline{QS}=4$，則正方形 ABCD 的邊長是多少? (A) $\frac{12}{5}$　(B) 5　(C) $\frac{144}{25}$　(D) $\frac{9}{14}$

<解析>

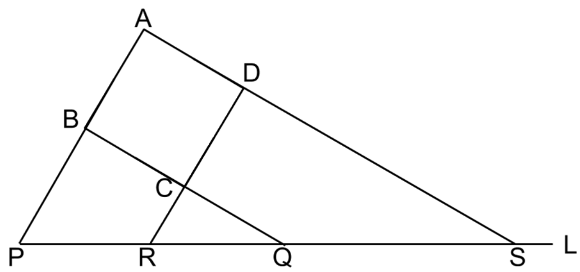
設正方形 ABCD 的邊長為 x

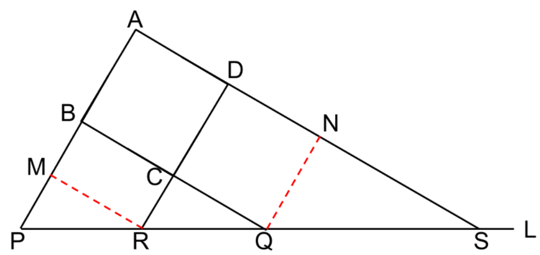
則$\overline{QN}=\overline{MR}=x$，$\overline{SN}=\sqrt{16-x^2}$

∵△PMR~△QNS

∴ $\dfrac{\overline{MR}}{\overline{PR}} = \dfrac{\overline{NS}}{\overline{QS}}$ ➔ $\dfrac{x}{3} = \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{4}$

➔ $x = \dfrac{12}{5}$，選 A。





(A)12.若$\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}$且$3^{15y+3x}=81^{xy}$，則$x-y=?$

(A)2　(B)3　(C)4　(D)5

<解析>

$2^{\frac{5}{x}}=2^{\frac{3y-6}{y}}$ ➔ $\frac{5}{x}=\frac{3y-6}{y}$，$\frac{5}{x}+\frac{6}{y}=3$

$3^{15y+3x}=3^{4xy}$ ➔ $15y+3x=4xy$，$\frac{15}{x}+\frac{3}{y}=4$

$\frac{1}{x}=\frac{1}{5}$，$\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$ ➔ $x=5$，$y=3$

x-y=2，選 A。

(D)13.某品牌之燈泡由 A 廠及 B 廠各生產 40%及 60%，A 廠生產的產品中有 1%的瑕疵品，B 廠生產的產品中有 5%瑕疵品，某日退貨部門回收一件瑕疵品，則此瑕疵品由 A 廠製造的機率有多少?

(A) $\frac{2}{11}$ (B) $\frac{2}{13}$ (C) $\frac{2}{15}$ (D) $\frac{2}{17}$

<解析>

假設 X 表回收到一件瑕疵品的事件

Y 表回收到一件 A 廠製造的事件

$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{0.4\times0.01}{0.4\times0.01+0.6\times0.05}=\frac{2}{17}$，選 D。

(A)14.某餐廳連鎖店的員工薪水，去年調高 20%，今年又調高了 40%，則這兩年薪資的年平均成長率為何?(已知$\log1.2\approx0.0792$，$\log1.4\approx0.1461$，$\log1.297\approx0.1127$)

(A)29.7%　(B)27.7%　(C)25.7%　(D)23.7%

<解析>

去年 1.2a

今年 1.2a×1.4=1.68a

$a(1+x)^2=1.68a$

$2\log(1+x)=\log1.68$ ➔ $2\log(1+x)=\log1.68=\log1.2+\log1.4=0.2253$

$\log(1+x)=0.11265\approx0.1127=\log1.297$

x=0.297=29.7%，選 A。

(**B**)15. There are eight students were average distributed four class. The probability that Sam and Dora are in differernt class is____.

(A)$\frac{7}{8}$ (B)$\frac{6}{7}$ (C)$\frac{5}{6}$ (D)$\frac{4}{5}$

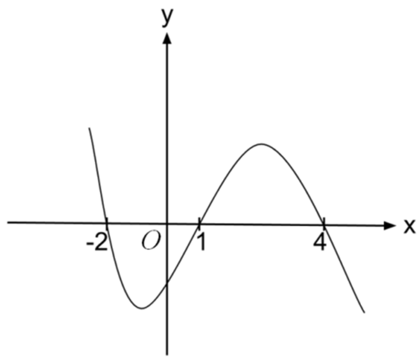
<解析>

$\frac{4\times3\times C_1^6\times C_1^5\times C_2^4\times C_2^2}{C_2^8\times C_2^6\times C_2^4\times C_2^2}=\frac{6}{7}$，選 B。

(**A**)16.右圖為某個三次實係數多項式函數$y=f(x)$的部分圖形，且圖形與 x 軸分別交於三點(-2, 0)，(1, 0)，(4, 0)，則不等式 f(1-x)<0 的解為何?

(A)x<-3 或 0<x<3 (B)x>-3 或 0<x<3

(C)x<-2 或 0<x<2 (D)x>-2 或 0<x<2



<解析>

設 f(x)=k(x+2)(x-1)(x-4)，其中 k<0(圖形右端向下)

f(1-x)=k(1-x+2)(1-x-1)(1-x-4)<0

➔k(3-x)(-x)(-3-x)<0

➔-k(x-3)×x×(x+3)<0

➔(x-3)×x×(x+3)<0

➔ x<-3 或 0<x<3，選 A。

(C)17.觀察下圖 1×1，2×2，3×3 方格中的數字規律，

1

1	2
2	2

1	2	3
2	2	3
3	3	3

如果在 15×15 的方格中，如上面的規則填入數字，則所填入的 225 個數字總和是多少? (A)2160 (B)2260 (C)2360 (D)2460

<解析>

1→1 個，2→3 個，3→5 個

k→(2k-1)個

15→(2×15-1)

1+2×3+3×5+.......+15(2×15-1)

$=\sum_{k=1}^{15} k(2k-1)=2\sum_{k=1}^{15} k^2-\sum_{k=1}^{15} k=2\times\frac{15(15+1)(30+1)}{6}-\frac{15\times16}{2}=2360$，選 C。

(B)18.抽樣某班半數學生的物理成績 X 與數學成績 Y，結果得到平均數、標準差與相關係數如下: $\bar{x}=65$，$\bar{y}=70$，$S_x=10$，$S_y=5$，$r=0.8$，若此班上有位同學物理成績為 75 分，利用迴歸直線方程式預測此生的數學成績是多少分? (A)72 (B)74 (C)76 (D)78 分

<解析>

直線方程式→ $y-\bar{y}=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$

$\because \bar{x}=65$，$\bar{y}=70$，$S_x=10$，$S_y=5$，$r=0.8$

$\therefore y-70=0.8\cdot\frac{5}{10}(x-65)$

當 x=75

∴y=0.4×(75-65)+70=74，選 B。

(**A**)19.從 1^3，2^3，3^3，4^3，.......，11^3 等 11 個數中，移走哪一個數，可以使剩下的 10 個數平均值為 414?

(A) 6^3 (B) 7^3 (C) 8^3 (D) 9^3

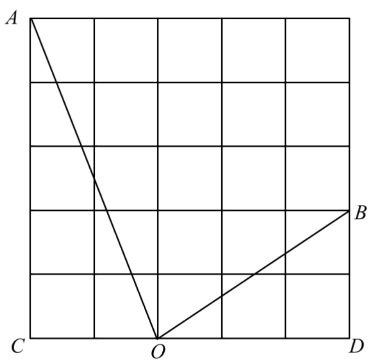
<解析>

$1^3+2^3+\ldots 11^3=[\frac{11\times(11+1)}{2}]^2=4356$

$4356-414\times10=216=6^3$，選 A。

(**B**)20.The square's side length is 1, then $\tan\angle AOB=?$

(A) $\frac{19}{3}$ (B) $\frac{19}{4}$ (C) $\frac{19}{5}$ (D) $\frac{19}{6}$



<解析>

$\overline{OB}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，$\overline{OA}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

$(\sqrt{34})^2=(\sqrt{13})^2+(\sqrt{29})^2-2\times\sqrt{13}\times\sqrt{29}\cdot\cos\angle AOB$

$\cos\angle AOB=\frac{4}{\sqrt{377}}$，$\tan\angle AOB=\frac{19}{4}$，選 B。

(**B**)21.要多少人以上才能保證其中至少有 3 人生日相同?

(A)365×2+1 (B)366×2+1 (C)365×2+3 (D)366×2+3 人

<解析>

1/1、1/2、……、1/31，2/1、2/2、……. 、2/29，3/1、…...，12/31

符合 366 天生日的人各要 2 人

再多 1 人就會有 3 人生日相同

➔366×2+1，選 B。

(**A**)22.已知 x÷y÷z=3, x÷y-z=10, x-y=28，則 x+y+z=?
(A)37 (B)36 (C)35 (D)34

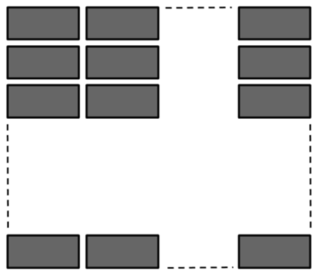
<解析>

①令 x÷y=t➔t÷z=3，t=3z； t-z=10，t=z+10。得 3z=z+10，z=5

②x÷y=15，且 x-y=28➔28÷(15-1)=2，y=2，x=30

③30+2+5=37，選 A。

(**A**)23.用 5 公分寬及 8 公分長的長方形紙片，間隔 1 公分鋪成右邊之正方形，問最少需要多少張紙片?
(A)6 (B)24 (C)40 (D)54 張



<解析>

[5+1, 8+1]=[6, 9]=18

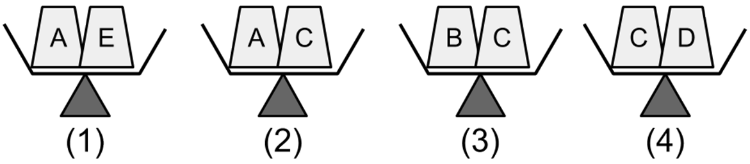
$\frac{18\times18}{6\times9}=6$，選 A。

(**D**)24.有王、趙、李三位老師帶著小華、小明、小剛三個學生去參加數學競賽，說巧不巧，每位老師都比自己帶的學生大 21 歲，已知李老師與小華年齡和為 44 歲，王老師與小華年齡和為 42 歲，且王老師比小明大 19 歲，求王、趙、李三位老師帶的學生分別是誰?
(A)小華是王老師帶的 (B)小明是趙老師帶的
(C)小剛是李老師帶的 (D)小華是趙老師帶的

<解析>

因為每位老師都比自己的學生大 21 歲
所以每位老師與自己的學生之和應該是奇數
➔小華與李老師、王老師的年齡和都是偶數
∴小華是趙老師帶的
且王老師比小明大 19 歲
∴小明是李老師帶的，而小剛是王老師帶的，選 D。

(C)25.把重量相同的 26 顆玻璃彈珠分裝在 A、B、C、D、E 五個袋子裡(袋子的重量不計)，每袋至少裝 2 顆球，且各袋中數量互不相同，秤重時，若玻璃彈珠達到 11 顆以上，則超重警鈴就會響，下面秤了 4 次:



其中第(1)、(3)、(4)次警鈴都響，只有第(2)次未響，則顆數 A+C+E-B-D=? (A)10 (B)11 (C)12 (D)13 顆

<解析>
A+E≧11，B+C≧11，C+D≧11
A+C＜11
當 C=9，A=1(不合)
當 C=8，A=2，E=9，B=3，D=4(合計 26 顆)
或 C=8，A=2，E=9，B=4，D=3
∴A+C+E-B-D=2+8+9-3-4=12，選 C。

二、計算題(20 分/20 分/10 分，共 50 分)

1. △ABC is satisfy with sinA=$\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$. Prove: △ABC is right triangle.

<解析>

$\sin A=\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$ ➔ $\sin A(\cos B+\cos C)=\sin B+\sin C$

$\frac{a}{2R}(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})=\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}$

$b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)=2bc(b+c)$

$bc^2+a^2b-b^3+ca^2+b^2c-c^3=2bc(b+c)$

$bc(b+c)+a^2(b+c)-(b^3+c^3)=2bc(b+c)$

➔ $(b+c)(a^2-b^2-c^2)=0$，b+c≠0，$a^2-b^2-c^2=0$

$\angle A=90°$，△ABC 是直角三角形。

2.試證: $2^{131}+192$ 為 224 的倍數

<解析>

∵224=$2^5\times 7$

∴ $2^{131}+192=2^5(2^{126}+6)=$

$2^5[(2^{126}-1)+7)]=2^5[(8^{42}-1)+7]=2^5\times 7[(8^{41}+8^{40}+.....+8+1)+1]$

$=224[(8^{41}+8^{40}+.....+8+1)+1]$

故 $2^{131}+192$ 為 224 的倍數

3. (1)找規律 <2, 3>=9，<3, 4>=17，<4, 5>=27，<5, 6>=39，則<6, 7>=?

(2)自己出題並解答

<解析>

(1)<2, 3>=2×3+3=9
<3, 4>=3×4+5=17
<4, 5>=4×5+7=27
<5, 6>=5×6+9=39
<6, 7>=6×7+11=53

(2) 略