



第十六屆IMC國際數學競賽 台灣區初賽  
16<sup>th</sup> International Mathematics Primary Contest (Taiwan)

高中一年級組

請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 10 分，共 250 分)

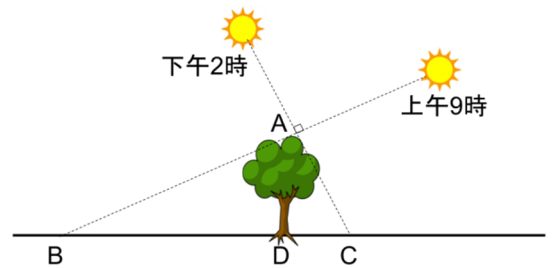
- ( B )1. 如圖，上午 9 時樹影  $\overline{BD}=16\text{m}$ ，下午 2 時樹影  $\overline{CD}=5\text{m}$ ，若兩次日照的光線夾角為 90 度，則樹高  $\overline{AD}$  最接近下列何者？  
(A)8m (B)9m (C)10m (D)11m

<解析>

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{80} \approx 9$$

選 B。

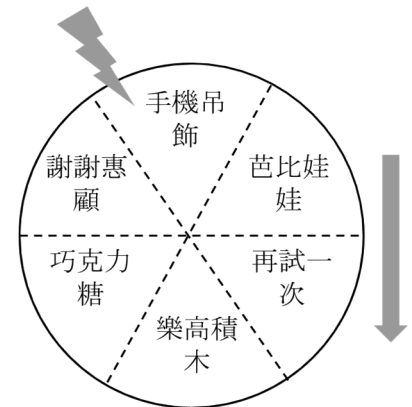


- ( D )2. 小萍逛夜市時，發現一項有趣的轉輪盤遊戲，已知轉盤每秒可轉到下一個區塊(如:從手機吊飾→謝謝惠顧)，若轉盤尚未開始轉動時，指針指著「手機吊飾」如右圖，當小萍朝著箭頭方向轉，轉盤順時針轉了 87 秒，小萍可以得到哪一項獎勵？  
(A)芭比娃娃 (B)手機吊飾 (C)巧克力糖 (D)樂高積木

<解析>

$$87 \div 6 = 14 \dots 3$$

手機吊飾 → 謝謝惠顧 → 巧克力糖 → 樂高積木  
選 D。



- ( C )3. 如圖，在直角坐標平面上，O 為原點且 A、C 分別為 x 軸和 y 軸上的一點，已知 P(m, n) 為長方形 OABC 內部一點，且  $\triangle PCO$  面積:  $\triangle PBA$  面積=2:3,  $\triangle PCB$  面積:  $\triangle PAO$  面積=2:1, 試問  $m+n=?$   
 (A)4 (B)5 (C)6 (D)7

<解析>

$$\because \triangle PCO : \triangle PBA = 2 : 3$$

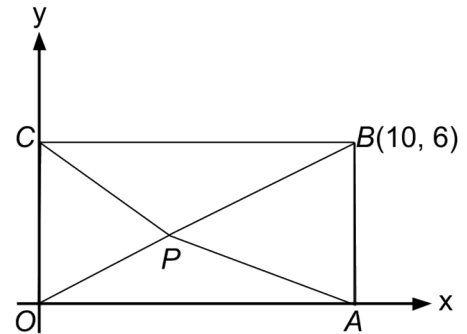
$\therefore P$  到  $\overline{CO}$  和  $\overline{AB}$  的距離比=2:3

$$m = 10 \times \frac{2}{2+3} = 4$$

同理

$$n = 6 \times \frac{1}{2+1} = 2$$

$\rightarrow m+n=4+2=6$ , 選 C。



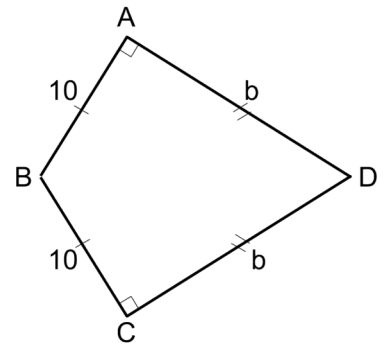
- ( D )4. 右圖四邊形外切於一半徑為 6 的圓，求  $b=?$   
 (A)8 (B)10 (C)12 (D)15

<解析>

連接  $\overline{BD} \rightarrow ABCD$  面積 =  $\triangle ABD + \triangle BCD$

$$\frac{1}{2} \times 6 \times (10 + b + 10 + b) = \frac{1}{2} \times 10 \times b \times 2$$

$b=15$ , 選 D。



- ( B )5. The ratio of boys and girls in the Sam's class is 7 : 6. The B-type blood ratio of the boys is  $\frac{2}{7}$ . The B-type blood ratio of the girls is  $\frac{1}{6}$ . Choose one person from Sam's classmates. The possibility of the B-type is \_\_\_\_\_. (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{3}{13}$  (C)  $\frac{4}{13}$  (D)  $\frac{19}{42}$

翻譯: Sam 的班級男、女生人數比為 7 : 6, 男生中血型是 B 型的占七分之二, 女生中血型是 B 型的占六分之一, 則班上同學中任抽一人, 其血型是 B 型的機率是多少?

<解析>

$$\frac{7}{13} \times \frac{2}{7} + \frac{6}{13} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{13}$$

選 B。

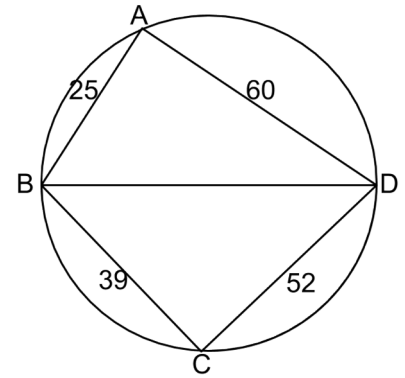
( C )6.如果邊長分別為 25、39、52 及 60 的四邊形內接於一個圓，則此圓的圓周長為何? (A)  $61\pi$  (B)  $63\pi$  (C)  $65\pi$  (D)  $67\pi$

<解析>

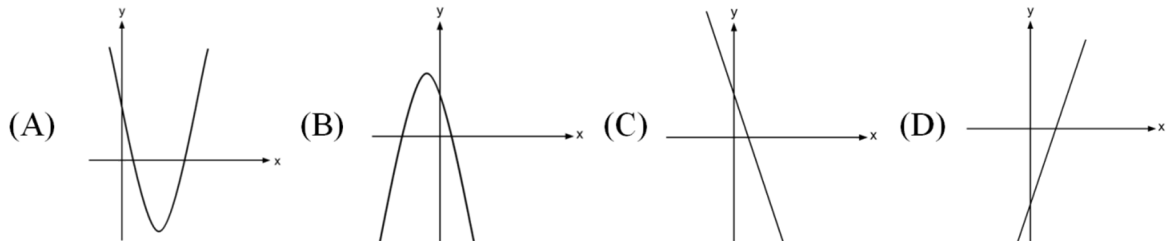
$$25^2 + 60^2 = 39^2 + 52^2 = 64^2$$

$$\rightarrow \angle A = \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \text{直徑} = \overline{BD} = 65, \text{圓周長} = 65\pi$$



( D )7.設  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ， $g(x) = cx^2 + bx + a$ ，已知當  $x=1$  時， $f(x)$  有最小值 -2，下列四個圖形中，何者不可能是  $y=g(x)$  的圖形?



<解析>

(1)  $y=f(x) = ax^2 + bx + c$ ，對稱軸  $x=1$ ，最低點  $(1, -2)$

$$\therefore a > 0, c > -2, \text{對稱軸 } x = -\frac{b}{2a} = 1, b = -2a$$

(2)  $c > -2, c \neq 0 \rightarrow y=g(x) = cx^2 + bx + a$

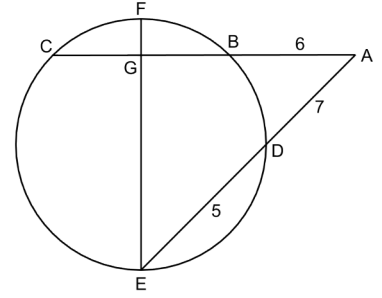
可能為開口向上或向下的拋物線

(3)  $c=0 \rightarrow y=g(x) = bx + a = -2ax + a$

圖形是直線，交  $x$  軸於  $(\frac{1}{2}, 0)$ ，交  $y$  軸於  $(0, a)$ ， $a > 0$

$\therefore$  (D) 不可能是  $y=g(x)$  的圖形

- ( A )8.如右圖， $\overline{AB}=6$ ， $\overline{AD}=7$ ， $\overline{DE}=5$ ， $\overline{BG}=\overline{GC}$ ， $\overline{FG}\perp\overline{BC}$ ，求 $\overline{GF}$ 的長？(A) $\frac{8\sqrt{11}}{11}$  (B) $\frac{6\sqrt{11}}{11}$  (C) $\frac{4\sqrt{11}}{11}$  (D) $\frac{2\sqrt{11}}{11}$



<解析>

$$\because \overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AD} \times \overline{AE}$$

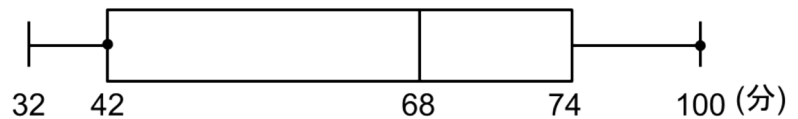
$$\therefore \overline{AC} = 7 \times 12 \div 6 = 14, \quad \overline{BC} = 14 - 6 = 8$$

$$\overline{GE} = \sqrt{12^2 - 10^2} = \sqrt{44}$$

$$\because \overline{CG} \times \overline{BG} = \overline{FG} \times \overline{GE}$$

$$\therefore \overline{FG} = 4 \times 4 \div \sqrt{44} = \frac{16}{\sqrt{44}} = \frac{16 \times 2\sqrt{11}}{44} = \frac{8\sqrt{11}}{11}, \quad \text{選 A。}$$

- ( B )9.右圖是某班數學科段考成績的盒狀圖，其中兩個黑點分別代表第10百分位數及第90百分位數，若全班有31人，考100分者至少有多少人？(A)3 (B)4 (C)5 (D)6 人



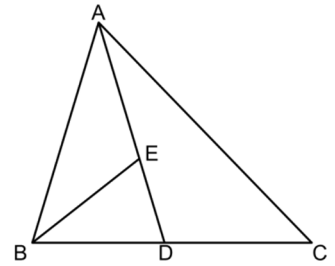
<解析>

$$31 \times \frac{90}{100} = 27.9, \quad 27+1=28$$

至少第28位到第31位學生的成績是100分

$31-28+1=4$ ，選 B。

- ( C )10. Point D and Point E are on the  $\overline{BC}$  and  $\overline{AD}$ .  $\overline{AD}$  is the angle bisector of  $\angle BAC$ . If  $\angle ABE = \angle C$ ,  $\overline{AE} : \overline{ED} = 2:1$ , then the area ratio of the  $\triangle BDE$  and  $\triangle ABC$  is \_\_\_\_\_.
- (A)2:11 (B)2:13 (C)2:15 (D)2:17



<解析>

$\triangle ABE$ 、 $\triangle ACD$

①  $\angle BAE = \angle CAD$

②  $\angle ABE = \angle C$

$\triangle ABE \sim \triangle ACD$ (AA)

$\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AE} : \overline{AD} = 2:3$

且  $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 2:3$

$$\frac{\triangle BDE}{\triangle ABD} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\triangle ABD}{\triangle ABC} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{2}{5}$$

$\therefore \frac{\triangle BDE}{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$ ，選 C。

- ( A )11. 不等式  $|x-1| + |x-3| < 6$  的解為何?

- (A) $-1 < x < 5$  (B) $-1 < x < 3$  (C) $x > 5$  或  $x < -1$  (D) $x > 3$  或  $x < -1$

<解析>

當  $x < 1$ ， $-(x-1)-(x-3) < 6$ ， $-2x < 2$ ， $x > -1$

$\rightarrow -1 < x < 1$

當  $1 \leq x < 3$ ， $(x-1)-(x-3) < 6$ ， $2 < 6$ (恆真)

$\rightarrow 1 \leq x < 3$

當  $x \geq 3$ ， $(x-1)+(x-3) < 6$ ， $2x < 10$ ， $x < 5$

$\rightarrow 3 \leq x < 5$

則  $-1 < x < 5$ ，選 A。

( C )12. 在半徑 4 公尺的半圓中，開闢一個內接矩形花園，且一邊與圓的直徑重合，試問此花園的最大面積為多少平方公尺？

- (A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 20 平方公尺

<解析>

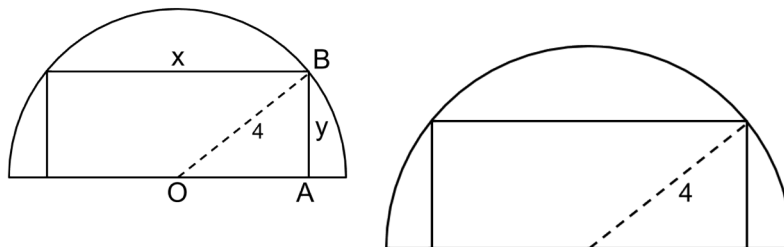
令長邊  $x$  寬邊  $y$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 4^2$$

利用算幾不等式

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{\frac{x^2 y^2}{4}} \rightarrow \frac{16}{2} \geq \frac{xy}{2}$$

$xy \leq 16$ ，選 C。



( A )13. 在平面上有一正方形 ABCD， $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$  的延長線分別交直線 L 於 P、Q、R、S。已知  $\overline{PR} = 3$ ， $\overline{QS} = 4$ ，則正方形 ABCD 的邊長是多少？

- (A)  $\frac{12}{5}$  (B) 5 (C)  $\frac{144}{25}$  (D)  $\frac{9}{14}$

<解析>

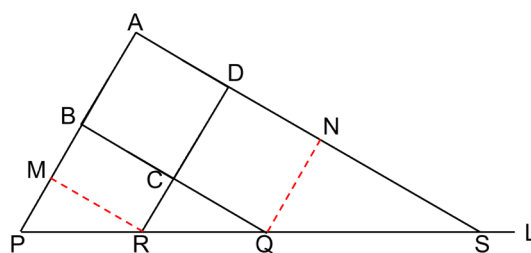
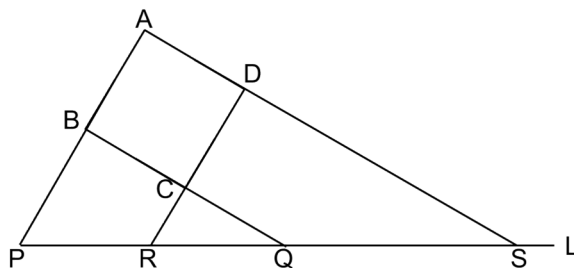
設正方形 ABCD 的邊長為  $x$

$$\text{則 } \overline{QN} = \overline{MR} = x, \overline{SN} = \sqrt{16 - x^2}$$

$\therefore \triangle PMR \sim \triangle QNS$

$$\therefore \frac{\overline{MR}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{NS}}{\overline{QS}} \rightarrow \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}$$

$$\rightarrow x = \frac{12}{5}, \text{ 選 A。}$$



( B )14.化簡 $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ 之值為何?

(A)2 (B)4 (C)6 (D)8

<解析>

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$20+14\sqrt{2} = 2^3 + 3 \times 2^2 \times \sqrt{2} + 3 \times 2 \times (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 = (2+\sqrt{2})^3$$

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

$$= 2+\sqrt{2} + 2-\sqrt{2} = 4, \text{ 選 B。}$$

( A )15. No matter which x is all real number value, the k value of

$\frac{x^2+ax+b}{3x^2+2x+1}$  is a certain number, then

(A) $k = \frac{1}{3}$  (B) $a = \frac{1}{3}$  (C) $b = \frac{2}{3}$  (D) $b = 3$

<解析>

$$\frac{x^2+ax+b}{3x^2+2x+1} = k$$

$$x^2+ax+b = k(3x^2+2x+1) = 3kx^2+2kx+k$$

$$k = \frac{1}{3}, a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, \text{ 選 A。}$$

( A )16.設正實數 a 之純小數部分為 b，且 $a^2+b^2=38$ ，則 a+b=?

(A)  $2\sqrt{10}$  (B)  $3\sqrt{10}$  (C)  $2\sqrt{6}$  (D)  $3\sqrt{6}$

<解析>

$\therefore b$  為純小數部分  $\therefore 0 \leq b < 1$ ，且 $a^2+b^2=38$

$\therefore 37 < a^2 \leq 38$ ，a 的整數部分為 6

故  $a=6+b$ ， $(6+b)^2+b^2=38$ ， $b = \frac{-6 \pm \sqrt{40}}{2} = -3 \pm \sqrt{10}$ ，且  $0 \leq b < 1$

$\therefore b = -3 + \sqrt{10}$ ， $a = 3 + \sqrt{10}$

故  $a+b = 2\sqrt{10}$ ，選 A。

- ( B )17.設  $a=2^{26}$  ,  $b=3^{16}$  , 已知  $\log a=7.8260$  ,  $\log b=7.6336$  , 下列何者正確?  
(A)a 為 7 位數 (B)b 為 8 位數 (C)ab 為 14 位數 (D)ab 為 15 位數

<解析>

$$\because \log a = 7.8260 , \log b = 7.6336$$

$\therefore a、b$  都是 8 位數

$$\because \log ab = \log a + \log b = 7.8260 + 7.6336 = 15.4596$$

$\therefore ab$  為 16 位數

- ( B )18.在職業棒球賽中,ERA 值是了解一個投手表現的重要統計數值,其計算方式如下:若此投手共主投  $n$  局,其總責任失分為  $E$ ,則 ERA 值為  $\frac{E}{n} \times 9$ 。有一位投手在之前的比賽共主投 90 局,且這 90 局他的 ERA 值為 3.2,最新的一場比賽中,此投手主投 6 局無責任失分,則打完這一場比賽後,此投手的 ERA 值成為  
(A)2.9 (B)3.0 (C)3.1 (D)3.2

<解析>

$$ERA = \frac{E}{n} \times 9 \rightarrow 3.2 = \frac{E}{90} \times 9 , E = 32$$

又投 6 局無責任失分,  $ERA = \frac{32}{90+6} \times 9 = 3$  , 選 B。

- ( C )19.某火力發電廠燒煤發電,會產生大量的空氣汙染,若精算出要清除  $r\%$  的空氣汙染,每度電需成本  $C$  元,  $C = \frac{4r}{100-r}$  ,  $0 \leq r < 100$  , 已知該電廠清除空氣汙染的成本不大於 4 元,試求  $r$  的最大值?  
(A)30 (B)60 (C)50 (D)40

<解析>

$$C = \frac{4r}{100-r} \leq 4 , r \leq 50$$

選 C。



( B )20. If  $a \neq 0$ ,  $5^a = 2^b = \sqrt{10^c}$ , then  $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = ?$

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

<解析>

$$\because 5^a = 10^{\frac{c}{2}} \rightarrow 5 = 10^{\frac{c}{2a}}, \quad 2^b = 10^{\frac{c}{2}} \rightarrow 2 = 10^{\frac{c}{2b}}$$

$$\therefore 10 = 10^{\frac{c}{2a} + \frac{c}{2b}}, \quad \frac{c}{2a} + \frac{c}{2b} = 1, \quad \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 2, \quad \text{選 B。}$$

( B )21. 要多少人以上才能保證其中至少有 3 人生日相同?

(A)365×2+1 (B)366×2+1 (C)365×2+3 (D)366×2+3 人

<解析>

1/1、1/2、.....、1/31，2/1、2/2、.....、2/29，3/1、.....，12/31

符合 366 天生日的人各要 2 人

再多 1 人就會有 3 人生日相同

→366×2+1，選 B。

( A )22. 已知  $x \div y \div z = 3$ ,  $x \div y - z = 10$ ,  $x - y = 28$ , 則  $x + y + z = ?$

(A)37 (B)36 (C)35 (D)34

<解析>

①令  $x \div y = t \rightarrow t \div z = 3$ ,  $t = 3z$ ;  $t - z = 10$ ,  $t = z + 10$ 。得  $3z = z + 10$ ,  $z = 5$

② $x \div y = 15$ , 且  $x - y = 28 \rightarrow 28 \div (15 - 1) = 2$ ,  $y = 2$ ,  $x = 30$

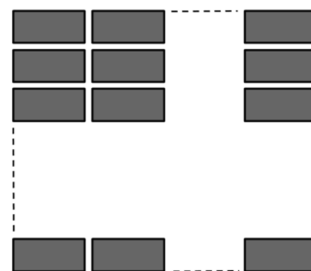
③ $30 + 2 + 5 = 37$ , 選 A。

( A )23. 用 5 公分寬及 8 公分長的長方形紙片

，間隔 1 公分鋪成右邊之正方形，問

最少需要多少張紙片?

(A)6 (B)24 (C)40 (D)54 張



<解析>

$$[5+1, 8+1] = [6, 9] = 18$$

$$\frac{18 \times 18}{6 \times 9} = 6, \quad \text{選 A。}$$

- ( D )24.有王、趙、李三位老師帶著小華、小明、小剛三個學生去參加數學競賽，說巧不巧，每位老師都比自己帶的學生大 21 歲，已知李老師與小華年齡和為 44 歲，王老師與小華年齡和為 42 歲，且王老師比小明大 19 歲，求王、趙、李三位老師帶的學生分別是誰？  
 (A)小華是王老師帶的 (B)小明是趙老師帶的  
 (C)小剛是李老師帶的 (D)小華是趙老師帶的

<解析>

因為每位老師都比自己的學生大 21 歲

所以每位老師與自己的學生之和應該是奇數

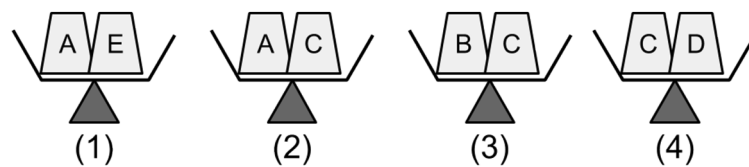
→小華與李老師、王老師的年齡和都是偶數

∴小華是趙老師帶的

且王老師比小明大 19 歲

∴小明是李老師帶的，而小剛是王老師帶的，選 D。

- ( C )25.把重量相同的 26 顆玻璃彈珠分裝在 A、B、C、D、E 五個袋子裡(袋子的重量不計)，每袋至少裝 2 顆球，且各袋中數量互不相同，秤重時，若玻璃彈珠達到 11 顆以上，則超重警鈴就會響，下面秤了 4 次：



其中第(1)、(3)、(4)次警鈴都響，只有第(2)次未響，則顆數  $A+C+E-B-D=?$  (A)10 (B)11 (C)12 (D)13 顆

<解析>

$A+E \geq 11$ ， $B+C \geq 11$ ， $C+D \geq 11$

$A+C < 11$

當  $C=9$ ， $A=1$ (不合)

當  $C=8$ ， $A=2$ ， $E=9$ ， $B=3$ ， $D=4$ (合計 26 顆)

或  $C=8$ ， $A=2$ ， $E=9$ ， $B=4$ ， $D=3$

∴ $A+C+E-B-D=2+8+9-3-4=12$ ，選 C。

二、計算題(20分/20分/10分，共50分)

1. As shown in the figure on the right, set  $\triangle ABC$  inscribed in a circle, the bisectors of  $\angle A$  and  $\angle B$  intersect at  $I$ , and the arc of  $BC$  intersect at  $D$ , verifying:  $\overline{DB} = \overline{DC} = \overline{DI}$

翻譯:如右圖，設 $\triangle ABC$ 內接於一圓， $\angle A$ 的平分線交 $\angle B$ 的平分線於 $I$ ，交弧 $BC$ 於 $D$ ，求證： $\overline{DB} = \overline{DC} = \overline{DI}$

<解析>

①  $\because \angle 1 = \angle 2$

$\therefore$  弧  $BD =$  弧  $CD$

$\therefore \overline{DB} = \overline{DC}$

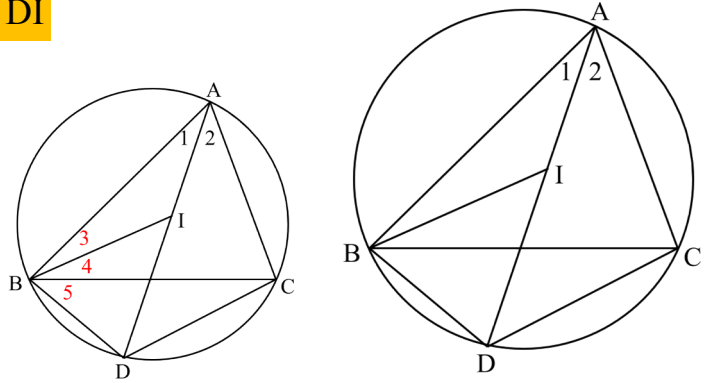
且  $\angle 1 = \angle 5$

② 又  $\angle 3 = \angle 4$

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5$

$\rightarrow \angle 1 + \angle 3 = \angle BID$  ,  $\angle BID = \angle DBI$

$\therefore \overline{DB} = \overline{DI}$  , 則  $\overline{DB} = \overline{DC} = \overline{DI}$



2. 試證:  $2^{131} + 192$  為 224 的倍數

<解析>

$\because 224 = 2^5 \times 7$

$\therefore 2^{131} + 192 = 2^5(2^{126} + 6) =$

$2^5[(2^{126} - 1) + 7] = 2^5[(8^{42} - 1) + 7] = 2^5 \times 7[(8^{41} + 8^{40} + \dots + 8 + 1) + 1]$

$= 224[(8^{41} + 8^{40} + \dots + 8 + 1) + 1]$

故  $2^{131} + 192$  為 224 的倍數

3. (1) 找規律  $\langle 2, 3 \rangle = 9$  ,  $\langle 3, 4 \rangle = 17$  ,  $\langle 4, 5 \rangle = 27$  ,  $\langle 5, 6 \rangle = 39$  , 則  $\langle 6, 7 \rangle = ?$

(2) 自己出題並解答

<解析>

(1)  $\langle 2, 3 \rangle = 2 \times 3 + 3 = 9$

$\langle 3, 4 \rangle = 3 \times 4 + 5 = 17$

$\langle 4, 5 \rangle = 4 \times 5 + 7 = 27$

$\langle 5, 6 \rangle = 5 \times 6 + 9 = 39$

$\langle 6, 7 \rangle = 6 \times 7 + 11 = 53$

(2) 略

