

2018 第十四屆  國際數學競賽複賽(台灣)
2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

高
中
一
年
級
試
卷

考試時間：90 分鐘 卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

2018 第十四屆 國際數學競賽複賽(台灣)

2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 4 分，共 28 分)

- () 1. 設 $a = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$ ，則 $a^3 + \frac{1}{a^3} = ?$ (A) 1392 (B) 1492 (C) 1592 (D) 1692。
- () 2. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ，若 $4000 < \left(\frac{5}{4}\right)^n < 5000$ ，求正整數 n 之值為何?
(A) 36 (B) 37 (C) 38 (D) 39。
- () 3. 設 P 、 Q 、 R 均為非負整數且 $P+Q+R=10$ ，求 $P \cdot Q \cdot R + P \cdot Q + Q \cdot R + R \cdot P$ 的最大值為多少?(A) 69 (B) 67 (C) 65 (D) 63。
- () 4. 已知某校一間辦公室有四位老師甲、乙、丙、丁。在某天的某個時段，他們每人各做一項工作，一人在查資料，一人在寫教案，一人在批改作業，另一人在列印材料。若下面 4 個說法都是正確的：
①甲不在查資料，也不在寫教案；②乙不在列印材料，也不在查資料；
③丙不在批改作業，也不在列印材料；④丁不在寫教案，也不在批改作業。
此外還可確定：如果甲不在列印材料，那麼丙不在查資料。根據以上資訊可判斷()。
(A) 甲在列印材料 (B) 乙在批改作業 (C) 丙在寫教案 (D) 丁在列印材料
- () 5. 設 a 、 b 、 c 是實數且 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 除以 $x^2 - 1$ 所得的餘數為 $-6x + 4$ ，則方程式 $f(x) = 0$ ，有幾個實根? (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 個。
- () 6. “ $m = 2$ ” 是 “直線 $mx - (m + 2)y + 3 = 0$ 和直線 $mx + y + 1 = 0$ 垂直” 的()。
(A) 充分不必要條件 (B) 必要不充分條件
(C) 充要條件 (D) 既不充分也不必要條件

() 7. 已知 $f(x) = x^2 - x + 186$, $g(x)$ 為正整係數多項式且

$$f(g(x)) = 3x^4 + 18x^3 + 50x^2 + 69x + 48 \quad , \quad \text{則 } g(x) \text{ 的各項係數之和為 () .}$$

- (A) 4 (B) 2 (C) -1 (D) $\frac{1}{2}$

二、填充題(每格 5 分, 共 40 分)

1. Three students A, B, C are practicing basketball. They pass the ball, they start with ball at student A ' s hand, How many ways can the passing of ball be done so that after 7 times the ball returns to the hand of student A ? ① .

2. 已知 $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 成立。數列 $\langle a_n \rangle$ 中, $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + n, n \geq 2 \end{cases}$, 求 $a_n =$ ② 。

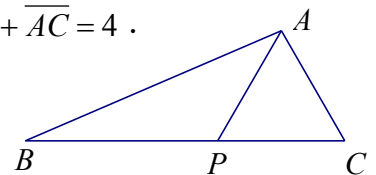
3. 有一火車在 a 時 b 分 (a, b 為整數), 離開火車站。行駛 8 公里後, 司機發現他錶上的分針與時針恰重疊, 假設在這 8 公里中, 火車的平平均時速為 33 公里, 求數對 (a, b) = ③ 。

4. Let $\{a_n\}$ be a sequence that satisfies $a_1=0, a_2=1, a_{2n-1}=a_n, a_{2n}=a_{2n-1}+a_{2n+1}$ then what is the numerical value of a_{2017} ? ④ 。

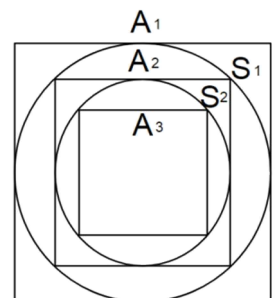
5. 解 $2\log_{\frac{1}{4}}(3-x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x-2) - 1$, 則 x 的範圍是 ⑤ 。

6. In $\triangle ABC$, point P lies on \overline{BC} , $\angle PAC = 60^\circ$, $\overline{PC} = 2$, $\overline{AP} + \overline{AC} = 4$.

Find the size of $\angle ACP =$ ⑥ 。



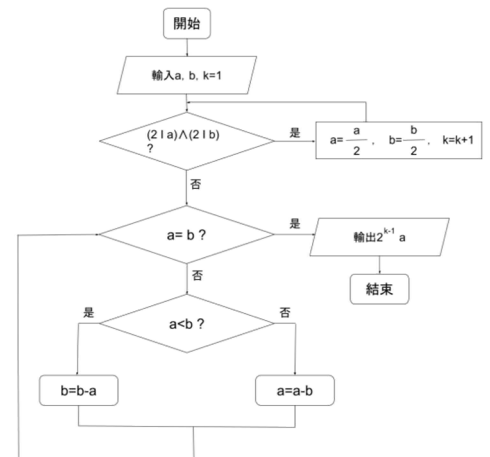
7. 如右圖, 已知 A_1 是邊長等於 8 的正方形, S_1 為 A_1 的內切圓, A_2 為 S_1 的內接正方形, S_2 為 A_2 的內切圓, A_3 為 S_2 的內接正方形, 如此一直做下去,。設 a_n 是正方形 A_n 的面積, 試求: $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 為 ⑦ 。



8. 設 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ ，試求 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$ 之值 = ⑧。

三、計算題(共 32 分) ※沒寫計算過程不予計分

1. “更相減損術”是出自《九章算術》的一個演算法，原文為“可半者半之，不可半者，副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也。以等數約之。”翻譯為演算法程式框圖如圖所示(其中 $2|a$ 表示“2 整除 a ”)，則若輸入 $a = 60, b = 84$ ，則輸出為?(12 分)



2. 有 A、B、C 三艘不同的渡船，其中只有 4 船僅能搭載 2 人，另外兩艘船則無限制。若某夫妻與朋友共 5 人欲同時渡河，且此夫妻一定要同船，則安全渡船的方法有多少種?(10 分)

3. 某放射性元素的質量隨時間逐漸衰退，且無論從何時算起，經過相同時間後的衰減百分比皆相同，今該元素物質在一年後，質量剩下 256 公克，而 10 年後，質量剩下 32 公克。試問該放射性元素半衰期(即衰變成原來一半所需的時間)為多少年?(10 分)