

2018 第十四屆  國際數學競賽複賽(台灣)
2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

高
中
二
年
級
試
卷

考試時間：90 分鐘 卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

2018 第十四屆 國際數學競賽複賽(台灣)

2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 4 分，共 28 分)

- () 1. 設 k 為實數，若不論 x 為任意實數，二次函數 $kx^2 + 2x - 2$ 的值恆小於 2，求 k 之解為何? (A) $k < -\frac{1}{4}$ (B) $k > -\frac{1}{4}$ (C) $k < -\frac{1}{2}$ (D) $k > -\frac{1}{2}$ 。
- () 2. 設 a 、 b 、 c 是實數且 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 除以 $x^2 - 1$ 所得的餘數為 $-6x + 4$ ，則方程式 $f(x) = 0$ ，有幾個實根? (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 個。
- () 3. 籃子中共有 25 個雞蛋，每次從中取出 2 個或 3 個，直到籃子中之雞蛋取完為止，共有多少種不同的取法? (A) 485 (B) 475 (C) 465 (D) 455 種。
- () 4. 已知某校一間辦公室有四位老師甲、乙、丙、丁，在某天的某個時段，他們每人各做一項工作，一人在查資料，一人在寫教案，一人在批改作業，另一人在列印材料。若下面 4 個說法都是正確的：
①甲不在查資料，也不在寫教案；②乙不在列印材料，也不在查資料；
③丙不在批改作業，也不在列印材料；④丁不在寫教案，也不在批改作業。
此外還可確定：如果甲不在列印材料，那麼丙不在查資料。根據以上資訊可以判斷
(A) 甲在列印材料 (B) 乙在批改作業 (C) 丙在寫教案 (D) 丁在列印材料
- () 5. 已知 $f(x) = x^2 - x + 186$ ， $g(x)$ 為正整係數多項式且
 $f(g(x)) = 3x^4 + 18x^3 + 50x^2 + 69x + 48$ ，則 $g(x)$ 的各項係數之和為()。
(A) 4 (B) 2 (C) -1 (D) $\frac{1}{2}$
- () 6. 從一個正 9 邊形的 9 個頂點中選 3 個使得它們是一個等腰三角形的三個頂點的方法數是? (A) 30 (B) 36 (C) 42 (D) 以上皆非

() 7. 甲、乙、丙、丁四人進行網球比賽，首先是甲與乙比，丙與丁比，這兩場比賽的勝者再爭奪冠軍。他們之間相互獲勝的機率如下：

	甲	乙	丙	丁
甲獲勝機率		0.3	0.3	0.8
乙獲勝機率	0.7		0.6	0.3
丙獲勝機率	0.7	0.4		0.5
丁獲勝機率	0.2	0.7	0.5	

則甲獲得冠軍的機率為 ()。

- (A) 0.165 (B) 0.245 (C) 0.275 (D) 0.315

二、填充題(每格 5 分，共 40 分)

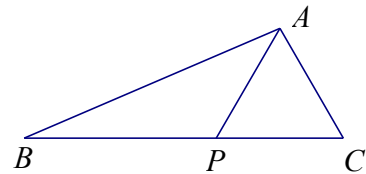
1. 已知 $\log_2 \approx 0.3010$ ，若 $4000 < \left(\frac{5}{4}\right)^n < 5000$ ，求正整數 n 之值 ①。

2. 圓心在直線 $x=y$ 上且過 $A(2, 4)$ 、 $B(2, -2)$ 二點的圓方程式為 ②。

3. 已知 $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 成立。數列 $\{a_n\}$ 中， $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + n, n \geq 2 \end{cases}$ ，求 $a_n =$ ③。

4. 解 $(x^2 + 3x - 4)^2 + (2x^2 - 7x + 6)^2 = (3x^2 - 4x + 2)^2$ ，得 $x =$ ④。

5. In $\triangle ABC$, point P lies on BC , $\angle PAC = 60^\circ$, $PC = 2$, $AP + AC = 4$. Find the size of $\angle ACP =$ ⑤。

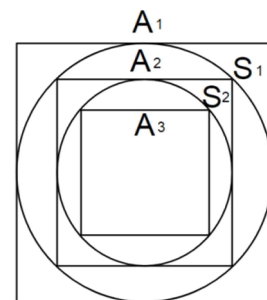


6. On a certain day, 5 students of a math class submit their worksheet to their math teacher, each of them puts it on top of the stack of worksheets on the table of their math teacher. During free time, the teacher gets the worksheets on top of the stack and starts marking them. Let us assign the order of submission of each worksheet as 1st, 2nd, 3rd, 4th, 5th. At noon time, the 4th worksheet has been completely marked. Which

of the following three options will the teacher do the marking on those worksheets in the afternoon?

- ① 5th, 2nd, 3rd, 1st ② 5th, 3rd, 2nd, 1st ③ 5th, 3rd, 1st ④ 3rd, 5th, 1st _____ ⑤ _____ (多選全對才給分)

7. 如右圖，已知 A_1 是邊長等於 8 的正方形， S_1 為 A_1 的內切圓， A_2 為 S_1 的內接正方形， S_2 為 A_2 的內切圓， A_3 為 S_2 的內接正方形，如此一直做下去，.....。設 a_n 是正方形 A_n 的面積，試求： $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 為 _____ 。



8. 設 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 為方程式 $8x^2 - 4x - 3 = 0$ 之兩根，則 $2\sin^2 \frac{\theta}{2} (\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2})^2$ 之值是 _____ 。

三、計算題(共 32 分) ※沒寫計算過程不予計分

1. 一平面與平面 $3x+2y+z+14=0$ 平行，且三軸截距和為 22，試求此平面與三坐標平面所圍成四面體之體積?(10 分)

2. 有 A、B、C 三艘不同的渡船，其中只有 A 船僅能搭載 2 人，另外兩艘船則無限制。若某夫妻與朋友共 5 人欲同時渡河，且此夫妻一定要同船，則安全渡船的方法有多少種?(10 分)

3. Determine the simplified numerical value of $\cos \frac{\pi}{2017} + \cos \frac{3\pi}{2017} + \dots + \cos \frac{2016\pi}{2017}$? (12 分)