2018 第十四屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)
2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

國中三年級試卷

考試時間：90 分鐘　　卷面總分：100 分

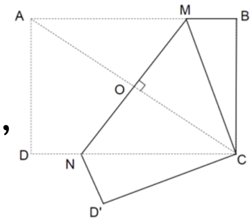
《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

2018 第十四屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)

2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 4 分，共 28 分)



(**B**)1. 如右圖，有一張長方形紙片 ABCD，若小瑋將 A 點摺到 C 點，使得 A、C 兩點重合，D 點落在 D' 點上，摺痕為 $\overline{MN}$，且 $\overline{AB}=12$ $\overline{BC}=9$，則 $\overline{MN}=?$ (A) 11 (B) $\frac{45}{4}$ (C) $\frac{45}{2}$ (D) $\frac{75}{8}$。

<解析>△AOM ≅ △CON (ASA 全等)，$\overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{OM}=\overline{ON}$

$\overline{AC}=\sqrt{9^2+12^2}=15$

$\because \Delta AOM \sim \Delta ABC$

$\therefore \overline{OM}:\overline{BC}=\overline{AO}:\overline{AB}$，$\overline{OM}:9=\frac{15}{2}:12$

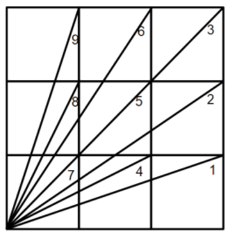
$\overline{OM}=\frac{45}{8}$ ➔ $\overline{MN}=2\overline{OM}=\frac{45}{4}$，選 B。

(**A**)2. 設 P、Q、R 均為非負整數且 P+Q+R=10，求 P．Q．R+P．Q+Q．R+R．P 的最大值為多少? (A) 69 (B) 67 (C) 65 (D) 63。

<解析> $PQR+PQ+QR+RP=(P+1)(Q+1)(R+1)-(P+Q+R)-1=(P+1)(Q+1)(R+1)-11$

=5×4×4-11=69，選 A。

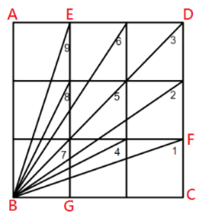
(P+1+Q+1+R+1=10+3=13➔P+1=5，Q+1=4，R+1=4，使(P+1)(Q+1)(R+1)最大)



(**A**)3. 右圖是一個 3×3 的正方形，求圖中∠1+∠2+∠3+......+∠9=?

(A) 405 度 (B) 450 度 (C) 360 度 (D) 315 度 。

<解析>



ΔBEG 和 ΔFBC 全等

$\angle 1+\angle 9=90^\circ$ 同理 $\angle 2+\angle 6=90^\circ$，$\angle 4+\angle 8=90^\circ$

$\angle 3=\angle 5=\angle 7=45^\circ$

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+....+\angle 9=3\times 90^\circ+45^\circ\times 3=405^\circ$，選 A。

(**A**)4. 在平面直角坐標系中，將點 $P(-3,4)$ 繞點 $Q(0,3)$ 順時針旋轉 $90°$ 得到點 R，則點 R 的座標是?(A)(1，6) (B)(1，7)(C)(2，5)(D)(2，6)

<解析>令 y=ax+b，P(-3，4)和 Q(0，3)代入求解

➔ $\begin{cases} 4=-3a+b \\ 3=0+b \end{cases}$ ➔b=3，a=$\frac{-1}{3}$，方程式: $y=-\frac{1}{3}x+3$ 且旋轉 90 度，$m=a'\times(-\frac{1}{3})=-1$，$a'=3$

新方程式: y=3x+c 通過 Q(0，3)，c=3，故 y=3x+3 且 R 點必在直線上

故 R(1，6)符合。

(**D**)5.若 $x^4+3x^3+kx^2-7x+k+2$ 有一個因式是 $x+1$，則 K=?

(A)-1.6 (B)-2.8 (C)-4.7(D) -3.5

<解析>令 $f(x)=x^4+3x^3+kx^2-7x+k+2$，$f(-1)=x^4+3x^3+kx^2-7x+k+2$=1-3+K+7+K+2=0

$2k=-7$，$k=-3.5$ 。

(**C**)6. 直角三角形的一條直角邊長 20，另兩邊長為整數，這樣的直角三角形有多少個? (A)3 (B)5 (C)4 (D)6

<解析>因為是直角三角形➔ $c^2=a^2+20^2$，(c+a)(c-a)=400

	1×400	2×200	4×100	5×80	8×50	10×40	16×25	20×20
c	不合	101	52	不合	29	25	不合	不合
a	不合	99	48	不合	21	15	不合	不合

符合條件有 4 組。

(**C**)7.若 P 是質數，且$P+4|7P$，則P^{2018}的末位數字是?

(A)3 (B)7 (C)9 (D)1

<解析>因為 P 是質數，故 P=3，(7×3)÷(3+4)=3….0

故3^{2018}的末位數規律 3、9、7、1

2018÷4=504….2，故末位數字是 9。

二、填充題(每格 5 分，共 40 分)

1. 已知$x=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2},y=(\sqrt{5}+2)^2$，$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=$__①__。

<解析>$x=\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{(\sqrt{5}-2)^2}{1}=(\sqrt{5}-2)^2$

x+y=$(\sqrt{5}+2)^2+(\sqrt{5}-2)^2=4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}+9=18$

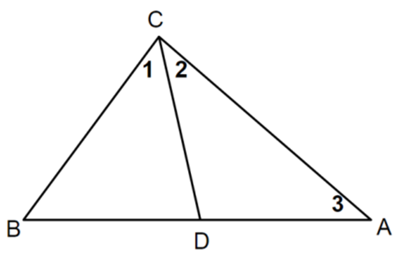
xy=$(\sqrt{5}+2)^2\times(\sqrt{5}-2)^2=(4\sqrt{5}+9)(-4\sqrt{5}+9)=81-80=1$

➔$x^2+y^2=18^2-2\times1=322$

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{y^2+x^2}{xy}=\dfrac{322}{1}=322$

1. The triangle's three-side length is a continuous natural number, an internal angle is another twice times the internal angle, the perimeter of this triangle is__②__。

<翻譯>三角形的三邊長為連續自然數，一個內角是另一個內角的兩倍，則此三角形的周長是__②__。



<解析>

$\angle C$ 是最大角=2×$\angle A$

假設$\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=a+2:a+1:a$，假設$\overline{AD}=x$

$\overline{CB}:\overline{CA}=\overline{BD}:\overline{AD}$ ➔ $a:a+1=:a+2-x:x$ ， $x=\dfrac{(a+2)(a+1)}{2a+1}$

$\Delta BCD\sim\Delta BAC$ ， $\overline{CD}:\overline{CB}=\overline{AC}:\overline{BA}$ ， $\dfrac{(a+2)(a+1)}{2a+1}:a=a+1:a+2$ ➔ $a=4$或$a=-1$ (不合)

三邊長=4、5、6，4+5+6=15。

2. 設 n 為質數且 $\dfrac{n^3+3n^2-4n+4}{n-1}$ 亦是質數，求 n=__③__。

<解析>

$\dfrac{n^3+3n^2-4n+4}{n-1}=n^2+4n+\dfrac{4}{n-1}$ ， $\because \dfrac{4}{n-1}\in Z$ ➔ $n-1|4$

且 n 為質數➔n=2、3、5

若 n=2 時→4+8+4=16 (不合)，n=3 時→9+12+2=23 (符合)

若 n=5 時→25+20+1=46 (不合)，n=3。

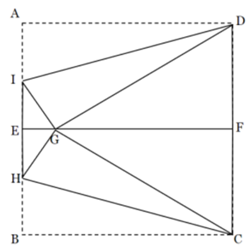
4. 解 $(x^3+3x-4)^2+(2x^2-7x+6)^2=(3x^2-4x+2)^2$ ，得 x=__④__。

<解析>令 A= x^2+3x-4 ，B= $2x^2-7x+6$ ➔A+B= $3x^2-4x+2$

$A^2+B^2=(A+B)^2$ ， $A^2+B^2=A^2+2AB+B^2$ ，2AB=0，AB=0

$(x^2+3x-4)(2x^2-7x+6)=0$ ， $(x+4)(x-1)(2x-3)(x-2)=0$ ，x=1、-4、$\dfrac{3}{2}$、2。

5. 如右圖，$\overline{EF}$ 為正方形 ABCD 之兩邊 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 中點的連線，今將 $\overline{BC}$ 沿 $\overline{HC}$ 摺疊使與 $\overline{GC}$ 重合，將 $\overline{AD}$ 沿 $\overline{ID}$ 摺疊使與 $\overline{GD}$ 重合，試求 $\angle DIG=$__⑥__。



<解析>$\overline{GD}=\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{BC}=\overline{CG}$

$\therefore \Delta CDG$ 為正三角形， $\angle CDG=60°$

$\angle ADG=90°-60°=30°$

$\angle GDI=15°$ ， $\therefore \angle DIG=90°-15°=75°$ 。

6. A positive integer, if adding 100 is a complete square, if adding 168 is another full square, then this number is__⑥__。

<翻譯>一個正整數，如果加上 100 是一個完全平方數，如果加上 168 則是另一個完全平方數，則這個數字是__⑥__。

<解析>令此數為 x(正整數)

$\begin{cases} x+100=p^2 \\ x+168=q^2 \end{cases}$ ，p 、$q \in N$ ➔ $q^2-p^2=68$

$(q+p)(q-p)=68\times 1=34\times 2=17\times 4$ ，p 、q 同時為奇數(偶數)

$\begin{cases} q+p=34 \\ q-p=2 \end{cases}$ ➔p=16，q=18，代入 x+100=16^2=256，x=156。

7. 已知 x、y 為正整數，若 2018，1086，3183 分別被自然數 x 除時，所得餘數都是 y，則 x－y =__⑦__。

<解析>3183-2018=1165，2018-1086=932

(1165，932)=233；2018÷233=8……154

X=233，y=154，x-y=233-154=79。

8.小沛想對五顆不同重量且小於 100 公斤的石頭進行秤重，由於該磅秤只能測量 100 公斤以上的物體，因此小沛將兩顆石頭一起秤，得出 10 組數據為 102、103、108、110、111、115、116、116 、117、124 公斤，那麼這五顆石頭中最輕的是__⑧__。

<解析>令五顆重量為 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$

➔兩顆的和最重= $x_4 + x_5$ =124，兩顆的和最輕= $x_1 + x_2$ =102

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < \frac{x_2 + x_3}{x_1 + x_4} < \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_5} < \frac{x_2 + x_5}{x_3 + x_4} < x_3 + x_5 < x_4 + x_5$$

$\therefore x_3 + x_4 = 116$ ， $x_2 + x_5 = 116$（$x_3 + x_4$ ， $x_2 + x_5$ 排第 3 或第 4 名）

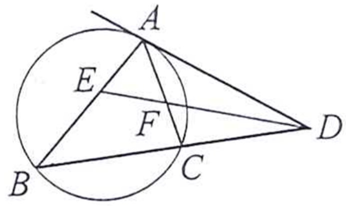
$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 102 + 103 + 108 + \ldots\ldots + 124 = 1122$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 208.5$$

5 顆中最輕的重量=208.5-(x_4+x_3)-(x_2+x_5)=280.5-116-116=48.5。

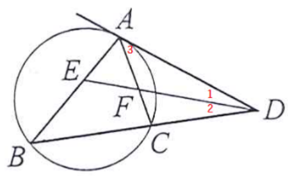
三、計算題(共 32 分) ※沒寫計算過程不予計分

1. 如右圖，過圓內接△ABC 的頂點 A 作切線交 $\overline{\text{BC}}$ 的延長線於 D，$\angle\text{ADB}$ 的角平分線交 $\overline{\text{AC}}$ 於 F，交 $\overline{\text{AB}}$ 於 E。



(1) 求證： $\overline{\text{AE}} = \overline{\text{AF}}$ 。(5 分)

(2) 若 $\angle\text{BAC} = 60°$ ，求 $\angle\text{AED}$ 的度數是? (5 分)



<解析> (1) $\overline{\text{DE}}$ 平分 $\angle\text{ADB}$ ➔ $\angle 1 = \angle 2$

$\overleftrightarrow{\text{AD}}$ 切圓於 A， $\overline{\text{AC}}$ 為一弦， $\angle 3 =$ 弧 AC× $\frac{1}{2}$

$\angle\text{B}$ 是弧 AC 的圓周角➔ $\angle\text{B} =$ 弧 AC× $\frac{1}{2} = \angle 3$

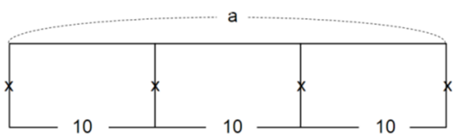
$\angle\text{AEF}$ 為△BDE 的外角， $\angle\text{AEF} = \angle 2 + \angle\text{B}$

同理 $\angle\text{AFE} = \angle 1 + \angle 3$ 又 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle\text{B}$

$\angle\text{AEF} = \angle\text{AFE}$ ➔ $\overline{\text{AE}} = \overline{\text{AF}}$ ，得證。

(2) $\overline{\text{AE}} = \overline{\text{AF}}$ 又 $\angle\text{BAC} = 60°$ ， $\angle\text{AED} = 60°$

2. 如圖，小麥在他的牧場用 90 公尺的鐵絲網(圖形粗線部分)，圍成長方形的養羊區並以鐵絲網將此養羊區分成 3 格，每格出口是 10 公尺，設長方形的寬是 x 公尺，長是 a 公尺，則



(1) a=? (以 x 表示) (5 分)

(2) 不計鐵絲網所占的位置，那麼養羊區最大面積是多少? (5 分)

<解析>

(1) 4x+a+(a-30)=90

4x+2a=120

➔a=60-2x

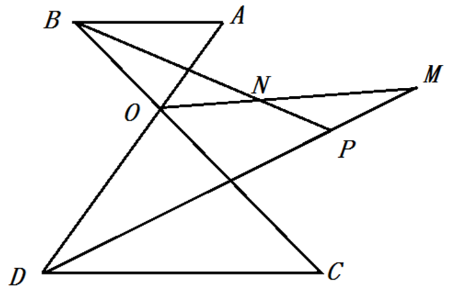
(2) 令養羊區面積為 y 公尺

$y = x \times a = x \times (60-2x) = -2x^2 + 60x = -2(x^2 - 30x + 225) + 450 = -2(x-15)^2 + 450$

y 最大值是 450，養羊區最大面積是 450 平方公尺。

3. 如圖，$\overline{AB}//\overline{CD}$，$\overline{CB}$與$\overline{AD}$交於點 O，$\angle ABC$與$\angle ADC$的角平分線交於點 P，$\angle AOC$的平分線交$\overline{DP}$於點 M，交$\overline{BP}$於點 N，求證：$MN^2 = MP \cdot MD - NP \cdot NB$。(12 分)

<解析>



$\angle M = \frac{1}{2}\angle C = \angle NBO, \angle BNO = \frac{1}{2}\angle A = \angle MDO$，

所以ΔMNP、ΔMDO、ΔBNO都相似，

於是$\frac{MP}{MN} \cdot MD = MO, \frac{NP}{MN} \cdot NB = NO$，

又$MN = MO - NO$，

所以$MN = \frac{MP}{MN} \cdot MD - \frac{NP}{MN} \cdot NB$，

即$MN^2 = MP \cdot MD - NP \cdot NB$.