2018 第十四屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)

2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

高中二年級試卷

考試時間：90 **分鐘**　　**卷面總分：**100 **分**

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

2018 第十四屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)

2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 4 分，共 28 分)

(**A**)1. 設 k 為實數，若不論 X 為任意實數，二次函數 kx^2+2x-2 的值恆小於 2，求 k 之解為何?(A) $k<-\frac{1}{4}$ (B) $k>-\frac{1}{4}$ (C) $k<-\frac{1}{2}$ (D) $k>-\frac{1}{2}$。

<解析>

由題意知 $kx^2+2x-2<2$ ➔ $kx^2+2x-4<0$ 恆成立

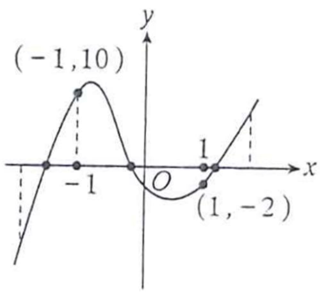
$\therefore (1)\ k<0$ ......①

$\therefore (2)\ 2^2-4\cdot k\cdot(-4)<0$ ➔ $k<-\frac{1}{4}$ ......②

由①②得知 $k<-\frac{1}{4}$ 。

(**D**)2. 設 a、b、c 是實數且 f(x)= x^3+ax^2+bx+c 除以 x^2-1 所得的餘數為-6x+4，則方程式 f(x)=0，有幾個實根?(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 個。

<解析>



$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

令 $f(x)=(x-1)(x+1)\times q(x)-6x+4$

➔ $f(1)=-6+4=-2$ ， $f(-1)=6+4=10$

$f(1)\times f(-1)<0$ ，又 $x\to\infty$ 時 $f(x)>0$ $\therefore f(\infty)\cdot f(1)<0$ ，

$x\to-\infty$ 時， $f(x)<0$ $\therefore f(-\infty)\cdot f(-1)<0$

由勘根定理得知 $f(x)=0$ 在 $(-\infty，-1)$ ，(-1，1) ，(1，∞)，各皆有一實根，

如圖所示得 $f(x)=0$ 恰有 3 個實根。

(　　)3．籃子中共有 25 個雞蛋，每次從中取出 2 個或 3 個，直到籃子中之雞蛋取完為止，共有多少種不同的取法？ (A) 485　(B) 475　(C) 465　(D) 455 種。

<解析>

設 2 個取 x 次，3 個取 y 次，則 2x+3y=25，x、y 為正整數或 0

x	11	8	5	2
y	1	3	5	7

共有$\frac{12!}{11!}+\frac{11!}{8!3!}+\frac{10!}{5!5!}+\frac{9!}{2!7!}$=12+165+252+36=465。

(**A**)4．已知某校一間辦公室有四位老師甲、乙、丙、丁．在某天的某個時段，他們每人各做一項工作，一人在查資料，一人在寫教案，一人在批改作業，另一人在列印材料．若下面 4 個說法都是正確的：

①甲不在查資料，也不在寫教案；②乙不在列印材料，也不在查資料；

③丙不在批改作業，也不在列印材料；④ 丁不在寫教案，也不在批改作業．

此外還可確定：如果甲不在列印材料，那麼丙不在查資料．根據以上資訊可以判斷

(A) 甲在列印材料　(B) 乙在批改作業　(C) 丙在寫教案　(D) 丁在列印材料

<解析>

如果甲不在列印材料，由於甲不在查資料，也不在寫教案，於是甲一定在批改作業。

此時丙不在查資料，丙不在批改作業，也不在列印材料於是丙一定在寫教案。

但是由於乙不在列印材料，也不在查資料，則乙一定在寫教案或批改作業這與題目條件

“他們每人各做一項工作”矛盾！故甲在列印材料。選 A

(**A**)5.已知 $f(x)=x^2-x+186$， $g(x)$為正整係數多項式且

$f\left(g\left(x\right)\right)=3x^4+18x^3+50x^2+69x+48$ ，則 $g\left(x\right)$ 的各項係數之和為（　　）.

(A) 4　(B) 2　(C) -1　(D) $\frac{1}{2}$

<解析> $g\left(x\right)$ 的各項係數之和為 $g\left(1\right)$，

$f\left(g\left(1\right)\right)=3+18+50+69+48=188$

故 $g^2\left(1\right)-g\left(1\right)+186=188$

解得：$g\left(1\right)=2$, 或 $g\left(1\right)=-1$（不合）故選 B

(**A**)6.從一個正 9 邊形的 9 個頂點中選 3 個使得它們是一個等腰三角形的三個頂點的方法數是?(A)30　(B) 36　(C) 42　(D)以上皆非

<解析>正九邊形 9 個頂點中，以其中某個點為頂點的等腰三角形有 4 個，共計 $4\times9=36$ 個，但其中的 9 個正三角形被重複計算了 3 次，即多算了 6 次，從而共有 $36-6=30$ 個等腰三角形.選 A.

(**A**)7. 甲、乙、丙、丁四人進行網球比賽，首先是甲與乙比，丙與丁比，這兩場比賽的勝者再爭奪冠軍. 他們之間相互獲勝的機率如下：

	甲	乙	丙	丁
甲獲勝機率		0.3	0.3	0.8
乙獲勝機率	0.7		0.6	0.3
丙獲勝機率	0.7	0.4		0.5
丁獲勝機率	0.2	0.7	0.5	

則甲獲得冠軍的機率為（　　）.

(A) 0.165　(B) 0.245　(C) 0.275　(D) 0.315

<解析>甲與乙比甲獲勝為事件 **A**，則 $P(A)=0.3$，

丙與丁比，丙獲勝為事件 **B**，則 $P(B)=0.5,\ P(\overline{B})=0.5,$

甲與丙比甲獲勝為事件 **C**，則 $P(C)=0.3,$

甲與丁比甲獲勝為事件 **D**，則 $P(D)=0.8,$

甲獲勝的概率為

$$P(ABC+A\bar{B}D)=P(ABC)+P(A\bar{B}D)$$

$$=P(A)P(B)P(C)+P(A)P(\bar{B})P(D)$$

$$=0.3\times0.5\times0.3+0.3\times0.5\times0.8=0.165.$$

因此答案選 **A.**

二、填充題(每格 5 分，共 40 分)

1.已知 $\log2\approx0.3010$，若 $4000<(\frac{5}{4})^n<5000$，求正整數 n 之值__①__ 。

<解析>

$4000<(\frac{5}{4})^n<5000$

➔ $\log4000<\log(\frac{5}{4})^n<\log5000$

➔$3+2\log2<n(\log5-\log4)<3+\log5$

➔$3.6020<0.097n<3.6990$

➔ $\frac{3.6020}{0.097}<n<\frac{3.6990}{0.097}$

➔37.13…<n<38.13..

得 n=38。

2.圓心在直線 x=y 上且過 A(2，4)、B(2，-2)二點的圓方程式為__②__ 。

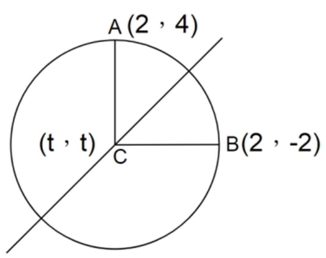
<解析>

設圓心 C(t，t)

$\because \overline{CA}=\overline{CB}$ ➔ $(t-2)^2+(t-4)^2=(t-2)^2+(t+2)^2$ ➔t=1

∴圓心 C(1，1) ∴半徑 $\overline{CA}=\sqrt{(1-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{10}$

➔所求為 $(x-1)^2+(y-1)^2=10$ 。



3.已知 1+2+3+.........+n=$\frac{n(n+1)}{2}$成立。數列<a_n>中，$\begin{cases}a_1=2\\a_n=a_{n-1}+n，n\geq2\end{cases}$，求 $a_n=$__③__ 。

<解析>

$\because a_n = a_{n-1} + n$ ➔ $a_n - a_{n-1} = n$

將 n 分別以 2、3…. 、n 代入得

$a_2 - a_1 = 2$

$a_3 - a_2 = 3$

$a_4 - a_3 = 3$

….

$+ \quad a_n - a_{n-1} = n$

$a_n - a_1 = 2+3+4+\ldots\ldots+n$

➔ $a_n = a_1 + (2+3+4+\ldots+n)$

➔ $a_n = 2 + (2+3+4+\ldots+n)$

➔ $a_n = 1 + (1+2+3+4+\ldots+n)$

➔ $a_n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2+n+2}{2}$ ，$n \geq 2$

又 $a_1 = 2 = \dfrac{1^2+1+2}{2}$ ，$\therefore a_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$ 。

4.解 $(x^2+3x-4)^2+(2x^2-7x+6)^2=(3x^2-4x+2)^2$ ，得 x=__④__ 。

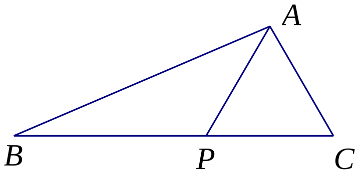
<解析>令 A= x^2+3x-4 ，B= $2x^2-7x+6$ ➔A+B= $3x^2-4x+2$

$A^2+B^2=(A+B)^2$ ， $A^2+B^2=A^2+2AB+B^2$ ，2AB=0，AB=0

$(x^2+3x-4)(2x^2-7x+6)=0$ ， $(x+4)(x-1)(2x-3)(x-2)=0$ ，x=1、-4、$\dfrac{3}{2}$、2。

5. 如圖，在△ ABC 中，點 P 在 BC 邊上，$\angle PAC = 60^\circ, PC = 2, AP + AC = 4$.

則 $\angle ACP =$ __⑤__ 。



在△ APC 中，因為 $\angle PAC = 60^\circ, PC = 2, AP + AC = 4$,

由餘弦定理得 $PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos\angle PAC$

所以 $2^2 = AP^2 + (4-AP)^2 - 2 \cdot AP \cdot (4-AP) \cdot \cos 60^\circ$,

整理得 $AP^2 - 4AP + 4 = 0$, 解得 $AP = 2$.

所以 $AC = 2$. 所以△ APC 是等邊三角形.

所以 $\angle ACP = 60^\circ$.

6．有五位同學需要在某天內將作業交給老師，每位同學交作業時將作業放在作業堆的最上面，老師一有空就從最上面拿一份作業來批改。按交作業的順序將五份作業編號為 1、2、3、4、5。中午的時候，已知第 4 份作業已經批改完了，則下列選項中可能為老師下午批改作業的順序情況有__⑥__。

① 5、2、3、1，②5、3、2、1，③5、3、1，④3、5、1

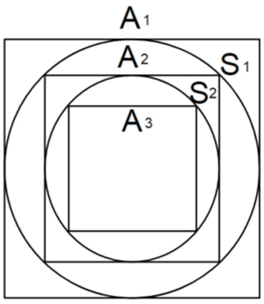
<解析>如果之前的 1,2,3 都沒批改，且下午批改作業前第 5 本作業交過來了，那麼下午批改的情況是②5、3、2、1；

如果第 2 本上午批改過了（第 2 本交來時恰好老師有空但批改完 2 就忙其他了），下午批改作業可能是③5、3、1；

如果第 2 本上午批改過了，下午批改第 3 本後第 5 本才交上來，那麼下午批改作業可能是④3、5、1。

答案： ②③④

7．如右圖，已知 A_1 是邊長等於 8 的正方形，S_1 為 A_1 的內切圓，A_2 為 S_1 的內接正方形，S_2 為 A_2 的內切圓，A_3 為 S_2 的內接正方形，如此一直做下去，……。設 a_n 是正方形 A_n 的面積，試求：$\sum_{k=1}^{10} a_k$ 為__⑦__。

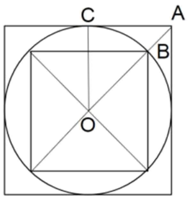


答案：

<解析>

由題意知 $a_1=8^2=64$

如右圖所示



$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{a_2}{a_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$\sum_{k=1}^{10} a_k$ 恰為以 $a_1=64$ 為首項

以 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$ 為公比的等比級數

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=64+64\times\frac{1}{2}+64\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\dots+64\times\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{64\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=128\times\frac{1023}{1024}=\frac{1023}{8}$$ 。

8.設 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 為方程式$8x^2-4x-3=0$之兩根，則$2\sin^2\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})^2$之值是___⑧___ 。

<解析>$\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 為方程式$8x^2-4x-3=0$之兩根

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta\times\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore 2\sin^2\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})^2=(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)=1-(\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta\cdot\cos\theta=1-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$....答。

（$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$ ； $(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})^2=\cos^2\theta+\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=1-\sin\theta$）

三、計算題(共 32 分) ※沒寫計算過程不予計分

1.一平面與平面 3x+2y+z+14=0 平行，且三軸截距和為 22，試求此平面與三坐標平面所圍成四面體之體積?(10 分)

<解析>

令所求平面 3x+2y+z=k

➔E: $\frac{x}{\frac{k}{3}}+\frac{y}{\frac{k}{2}}+\frac{z}{k}=1$，且三軸截距和為 22

$\frac{k}{3}+\frac{k}{2}+k=22$ ➔ $\frac{11k}{6}=22$ ➔k=12

E: $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{12}=1$，此平面與三坐標面所圍成四面體之體積為$\frac{1}{6}\cdot4\cdot6\cdot12=48$....答。

2. 有 A、B、C 三艘不同的渡船，其中只有 A 船僅能搭載 2 人，另外兩艘船則無限制。若某夫妻與朋友共 5 人欲同時渡河，且此夫妻一定要同船，則安全渡船的方法有多少種?(10 分)

<解析>

當某夫妻搭 A 船時，其餘 3 人有 $2^3=8$ 種

當某夫妻搭 B 船時，其餘 3 人有 3^3 -1 (同搭 A 船) =26 種

當某夫妻搭 C 船時，與 B 船相同

故安全渡河的方法有 8+26+26=60 種。

3. 求 $\cos\frac{\pi}{2017}+\cos\frac{3\pi}{2017}+\ldots\ldots+\cos\frac{2017\pi}{2017}$ 的值為何?(12 分)

<解析>

$$\cos\frac{\pi}{2017}+\cos\frac{3\pi}{2017}+\ldots\ldots+\cos\frac{2017\pi}{2017}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{2017}(\cos\frac{\pi}{2017}+\cos\frac{3\pi}{2017}+\ldots\ldots+\cos\frac{2017\pi}{2017})}{2\sin\frac{\pi}{2017}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{2017}\cos\frac{\pi}{2017}+2\sin\frac{\pi}{2017}\cos\frac{3\pi}{2017}+\ldots\ldots+2\sin\frac{\pi}{2017}\cos\frac{2017\pi}{2017}}{2\sin\frac{\pi}{2017}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{2017}\cos\frac{\pi}{2017}+2\sin\frac{\pi}{2017}\cos\frac{3\pi}{2017}+\ldots\ldots+2\sin\frac{\pi}{2017}\cos\frac{2017\pi}{2017}}{2\sin\frac{\pi}{2017}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{2017}\cos\frac{\pi}{2017}+2\sin\frac{\pi}{2017}\cos\frac{3\pi}{2017}+\ldots\ldots+2\sin\frac{\pi}{2017}\cos\frac{2017\pi}{2017}}{2\sin\frac{\pi}{2017}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{2017}+\sin\frac{4\pi}{2017}-\sin\frac{2\pi}{2017}+\ldots\ldots+\sin\frac{2018\pi}{2017}-\sin\frac{2016\pi}{2017}}{2\sin\frac{\pi}{2017}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2018\pi}{2017}}{2\sin\frac{\pi}{2017}}=-\frac{1}{2}$$