2018 第十四屆IMC國際數學競賽複賽(台灣)

2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

高中一年級試卷

考試時間：90 分鐘　　卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

2018 第十四屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)
2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 4 分，共 28 分)

(D)1. 設 a=$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$，則$a^3+\frac{1}{a^3}=$? (A)1392 (B) 1492 (C) 1592 (D) 1692。

<解析>

$\because a=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$，$\therefore \frac{1}{a}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

$a+\frac{1}{a}=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2+(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\frac{12-2\sqrt{35}+12+2\sqrt{35}}{2}=12$

$\therefore a^3+\frac{1}{a^3}=(a+\frac{1}{a})^3-3\cdot a\cdot\frac{1}{a}(a+\frac{1}{a})=12^3-3\cdot 12=$1692。

(C)2. 已知$\log 2\approx 0.3010$，若 4000<$(\frac{5}{4})^n$<5000，求正整數 n 之值為何?

(A)36 (B)37 (C)38 (D)39。

<解析>

4000<$(\frac{5}{4})^n$<5000

➔ $\log 4000<\log(\frac{5}{4})^n<\log 5000$

➔3+2log2<n(log5-log4)<3+log5

➔3.6020<0.097n<3.6990

➔ $\frac{3.6020}{0.097}<n<\frac{3.6990}{0.097}$

➔37.13…<n<38.13..

得 n=38。

(A)3. 設 P、Q、R 均為非負整數且 P+Q+R=10，求 P・Q・R+P・Q+Q・R+R・P 的最大值為多少?(A)69 (B)67 (C)65 (D)63。

<解析>$PQR+PQ+QR+RP=(P+1)(Q+1)(R+1)-(P+Q+R)-1=(P+1)(Q+1)(R+1)-11$

=5×4×4-11=69，選 A。

(P+1+Q+1+R+1=10+3=13➔P+1=5，Q+1=4，R+1=4，使(P+1)(Q+1)(R+1)最大)

(A)4.已知某校一間辦公室有四位老師甲、乙、丙、丁．在某天的某個時段，他們每人各做一項工作，一人在查資料，一人在寫教案，一人在批改作業，另一人在列印材料．若下面 4 個說法都是正確的：

①甲不在查資料，也不在寫教案；②乙不在列印材料，也不在查資料；

③丙不在批改作業，也不在列印材料；④丁不在寫教案，也不在批次工作．

此外還可確定：如果甲不在列印材料，那麼丙不在查資料．根據以上資訊可判斷( )．

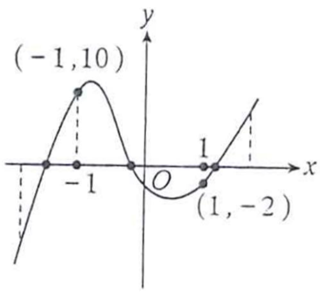
(A)甲在列印材料 (B)乙在批改作業 (C)丙在寫教案 (D)丁在列印材料

<解析>如果甲不在列印材料，由於甲不在查資料，也不在寫教案，於是甲一定在批改作業。此時丙不在查資料，丙不在批改作業，也不在列印材料於是丙一定在寫教案。

但是由於乙不在列印材料，也不在查資料，則乙一定在寫教案或批改作業這與題目條件“他們每人各做一項工作”矛盾！故甲在列印材料，選 A。

(D)5. 設 a、b、c 是實數且 f(x)= x^3+ax^2+bx+c 除以 x^2-1 所得的餘數為-6x+4，則方程式 f(x)=0，有幾個實根? (A)0 (B)1 (C)2 (D)3 個。

<解析>



$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

令 $f(x)=(x-1)(x+1)\times q(x)-6x+4$

➔ $f(1)=-6+4=-2$ ， $f(-1)=6+4=10$

$f(1)\times f(-1)<0$ ，又 $x\to\infty$ 時 $f(x)>0$ $\therefore f(\infty)\cdot f(1)<0$ ，

$x\to-\infty$ 時， $f(x)<0$ $\therefore f(-\infty)\cdot f(-1)<0$

由勘根定理得知 $f(x)=0$ 在 $(-\infty, -1)$ ，(-1，1) ，(1， ∞)，各皆有一實根，

如圖所示得 $f(x)=0$ 恰有 3 個實根。

(A)6. "$m=2$" 是"直線$mx-(m+2)y+3=0$和直線$mx+y+1=0$垂直"的 (　　　　).

(A)充分不必要條件　　　　(B)必要不充分條件

(C)充要條件　　　　(D)既不充分也不必要條件

<解析>$m=2$或$m=-1$時均有直線$mx-(m+2)y+3=0$和直線$mx+y+1=0$垂直。

於是選 A

(B)7. 已知$f(x)=x^2-x+186$，$g(x)$為正整係數多項式且

$f(g(x))=3x^4+18x^3+50x^2+69x+48$，則$g(x)$的各項係數之和為 (　　).

(A) 4　　(B) 2　　(C) -1　　(D) $\frac{1}{2}$

<解析>$g(x)$ 的各項係數之和為$g(1)$，

$f(g(1))=3+18+50+69+48=188$

故$g^2(1)-g(1)+186=188$

解得：$g(1)=2$,或$g(1)=-1$（不合）故選 B

二、填充題(每格 5 分，共 40 分)

1. A,B,C三人傳球，球開始在A的手中，則經過7次傳球後回到A手中的不同傳球過程有

① 種.

從A傳出後中間未回到A的傳法有 2 種；

從A傳出後中間僅一次回到A的傳法有$2^2\times4$種；

從A傳出後中間有兩次回到A的傳法有$2^3\times3$種；

故共有42種

2. 已知 1+2+3+.........+n=$\frac{n(n+1)}{2}$成立。數列<a_n>中，$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + n，n \geq 2 \end{cases}$，求 $a_n =$ ② 。

<解析>

$\because a_n = a_{n-1} + n \Rightarrow a_n - a_{n-1} = n$

將 n 分別以 2、3.... 、n 代入得

$a_2 - a_1 = 2$

$a_3 - a_2 = 3$

$a_4 - a_3 = 3$

....

$+ \quad a_n - a_{n-1} = n$

$a_n - a_1 = 2+3+4+......+n$

$\Rightarrow a_n = a_1 + (2+3+4+...+n)$

$\Rightarrow a_n = 2 + (2+3+4+...+n)$

$\Rightarrow a_n = 1 + (1+2+3+4+...+n)$

$\Rightarrow a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$，$n \geq 2$

又 $a_1 = 2 = \frac{1^2+1+2}{2}$，$\therefore a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$ 。

3. 有一火車在 a 時 b 分(a、b 為整數)，離開火車站。行駛 8 公里後，司機發現他錶上的分針與時針恰重疊，假設在這 8 公里中，火車的平均時速為 33 公里，求數對(a、b)= ③ 。

<解析>設 a 時 m 分兩針重疊，$0 \leq a \leq 11$，則 $5a + \frac{m}{12} = m \Rightarrow m = \frac{60}{11}a$

過去 8 公里花了($60 \times \frac{8}{33}$)分=$\frac{160}{11}$分=$14\frac{6}{11}$分

又因火車在整數的「分」離開車站$\Rightarrow b + 14\frac{6}{11} = m = \frac{60}{11}a$

$\Rightarrow b + 14 = \frac{60}{11}a - \frac{6}{11} = 5a + \frac{5a-6}{11}$為整數，5a-6 為 11 的倍數

$\Rightarrow$取 a=10，m=$\frac{600}{11} = 54\frac{6}{11}$分，$54\frac{6}{11} - 14\frac{6}{11} = 40$ (分)，於是 a=10，b=40。

4． 已知數列$\{a_n\}$滿足：$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{2n-1}=a_n$，$a_{2n}=a_{2n-1}+a_{2n+1}$則a_{2017}的值為__④__。

<解析>$a_{2^n+1}=1, a_{2^n}=n$

證明：$a_{2^n+1}=a_{2(2^{n-1}+1)-1}=a_{2^{n-1}+1}=\cdots=a_{2^0+1}=a_3=a_2=1$

$a_{2^n}=a_{2^n-1}+a_{2^n+1}=a_{2^n-1}+1$，故$\{a_{2^n}\}$是以1為公差的等差數列

於是：$a_{2^n}=a_{2^0}+n=n$

$\therefore a_{2017}=a_{1009}=a_{505}=a_{253}=a_{127}=a_{64}=6$

5． 解$2\log_{\frac{1}{4}}(3-x)\geq\log_{\frac{1}{2}}(x-2)-1$，則 x 的範圍是__⑤__。

<解析>

$\begin{cases}3-x>0\\x-2>0\end{cases}\Rightarrow 2<x<3$……①

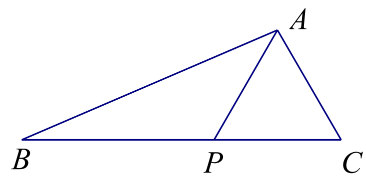
$2\log_{\frac{1}{4}}(3-x)\geq\log_{\frac{1}{2}}(x-2)-\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\Rightarrow 2\log_{\frac{1}{4}}(3-x)\geq\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-2}{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow 2\log_{(\frac{1}{2})^2}(3-x)\geq\log_{\frac{1}{2}}2(x-2)\Rightarrow\frac{2}{2}\log_{(\frac{1}{2})}(3-x)\geq\log_{\frac{1}{2}}2(x-2)$

$\Rightarrow\log_{(\frac{1}{2})}(3-x)\geq\log_{\frac{1}{2}}2(x-2)\Rightarrow 3-x\leq 2x-4\Rightarrow x\geq\frac{7}{3}$……②

由①②得$\frac{7}{3}\leq x<3$。

6． 如圖，在$\triangle ABC$中，點P在BC邊上，$\angle PAC=60^\circ, PC=2, AP+AC=4$.則$\angle ACP=$__⑥__。



在$\triangle APC$中，因為$\angle PAC=60^\circ, PC=2, AP+AC=4$，

餘弦定理得$PC^2=AP^2+AC^2-2\cdot AP\cdot AC\cdot\cos\angle PAC$

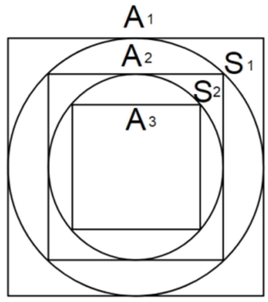
所以$2^2=AP^2+(4-AP)^2-2\cdot AP\cdot(4-AP)\cdot\cos 60^\circ$，

整理得$AP^2-4AP+4=0$， 解得$AP=2$.

所以$AC=2$． 所以$\triangle APC$是等邊三角形.

所以$\angle ACP=60^\circ$.

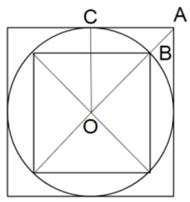
7. 如右圖，已知 A_1是邊長等於 8 的正方形，S_1為 A_1的內切圓，A_2為 S_1的內接正方形，S_2為 A_2的內切圓，A_3為 S_2的內接正方形，如此一直做下去，……。設 a_n是正方形 A_n的面積，試求：$\sum_{k=1}^{10} a_k$ 為___⑦___。



<解析>

由題意知 $a_1=8^2=64$

如右圖所示



$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{a_2}{a_1}=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{1}{2}$$

$\sum_{k=1}^{10} a_k$ 恰為以 $a_1=64$ 為首項

以 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$ 為公比的等比級數

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=64+64\times\frac{1}{2}+64\times(\frac{1}{2})^2+\ldots+64\times(\frac{1}{2})^9=\frac{64\left[1-(\frac{1}{2})^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=128\times\frac{1023}{2014}=\frac{1023}{8}$$ 。

8. 設 $f(x)=x^4+2x^3-3x^2+5x+1$，試求 $f(\frac{1}{\sqrt{2}+1})$之值=___⑧___。

<解析>

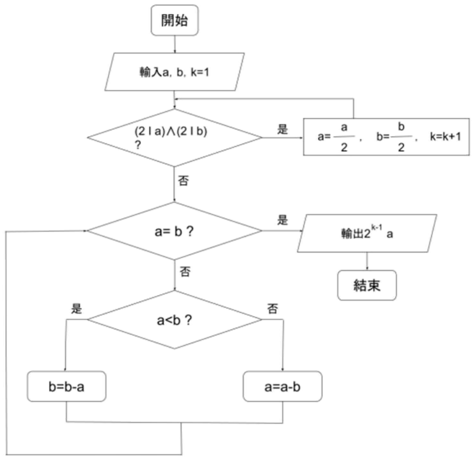
$x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$ ，$x+1=\sqrt{2}$ ，$x^2+2x+1=2$ ，$x^2+2x-1=0$

$f(x)=(x^2+2x-1)(x^2-2)+9x-1$

$$\therefore f(\frac{1}{\sqrt{2}+1})=f(\sqrt{2}-1)=0+9(\sqrt{2}-1)-1=9\sqrt{2}-10$$ 。

三、計算題(共 32 分) ※沒寫計算過程不予計分

1. “更相減損術”是出自《九章算術》的一個演算法，原文為“可半者半之，不可半者，副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也。以等數約之。”翻譯為演算法程式框圖如圖所示(其中$2|a$表示“2 整除a”)，則若輸入$a=60, b=84$，則輸出為(　　).



<解析>執行程式其中，a,b,k 的變化如下表所示

輸出 $2^{k-1}a=2^{3-1}\times 3=12$.

a	b	k
30	**42**	**2**
15	**21**	**3**
15	**6**	
9	**6**	
3	**6**	
3	**3**	

2.有 A、B、C 三艘不同的渡船，其中只有 A 船僅能搭載 2 人，另外兩艘船則無限制。若某夫妻與朋友共 5 人欲同時渡河，且此夫妻一定要同船，則安全渡船的方法有多少種?

<解析>

當某夫妻搭 A 船時，其餘 3 人有$2^3=8$種

當某夫妻搭 B 船時，其餘 3 人有3^3-1 (同搭 A 船)=26 種

當某夫妻搭 C 船時，與 B 船相同

故安全渡河的方法有 8+26+26=60 種。

3.某放射性元素的質量隨時間逐漸衰退，且無論從何時算起，經過相同時間後的衰減百分比率皆相同，今該元素物質在一年後，質量剩下 256 公克，而 10 年後，質量剩下 32 公克。試問該放射性元素半衰期(即衰變成原來一半所需的時間)為多少年?

<解析>

設現有 k 公克，半衰期為 a 年，則 t 年後的質量為 $\mathrm{f(t)}=\mathrm{k}\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{t}{a}}$

$$\begin{cases} f(1)=k\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{1}{a}}=128 \\ f(10)=k\cdot(\frac{1}{2})^{\frac{10}{a}}=16 \end{cases}$$

兩式相除➔ $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{a}-\frac{10}{a}}=8$ ， $2^{\frac{9}{a}}=2^3$ ，a=3，故半衰期是 3 年。