2018 第十四屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)
2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

國中二年級試卷

考試時間：90 分鐘　　卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

2018 第十四屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)

2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 4 分，共 28 分)

(**A**)1．設 P、Q、R 均為非負整數且 P+Q+R=10，求 P・Q・R+P・Q+Q・R+R・P 的最大值

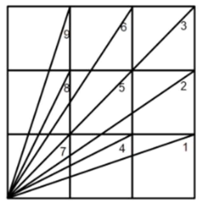
為多少? (A)69 (B)67 (C)65 (D)63。

<解析>$PQR+PQ+QR+RP=(P+1)(Q+1)(R+1)-(P+Q+R)-1=(P+1)(Q+1)(R+1)-11$

=5×4×4-11=69，選 A。

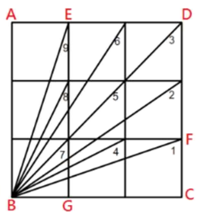
(P+1+Q+1+R+1=10+3=13➔P+1=5，Q+1=4，R+1=4，使(P+1) (Q+1) (R+1)最大)

(**A**)2．右圖是一個 3×3 的正方形，求圖中∠1+∠2+∠3+……+∠9=?



(A)405 度 (B)450 度 (C)360 度 (D)315 度 。

<解析>

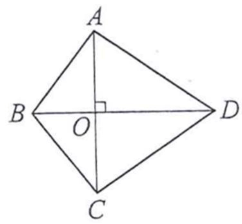


ΔBEG 和 ΔFBC 全等

$\angle 1+\angle 9=90^\circ$ 同理 $\angle 2+\angle 6=90^\circ$ ， $\angle 4+\angle 8=90^\circ$

$\angle 3=\angle 5=\angle 7=45^\circ$

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+....+\angle 9=3\times 90^\circ+45^\circ\times 3=405^\circ$ ，選 A。



(**C**)3.如右圖，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$ ，$\overline{AB}=5$ ，$\overline{CD}=7$ ，則 $\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=?$

(A)50 (B)70 (C)74 (D)98。

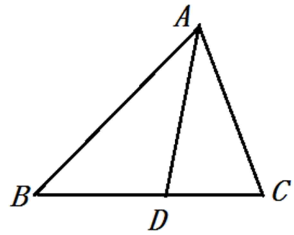
<解析>

$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=\overline{AO}^2+\overline{DO}^2+\overline{BO}^2+\overline{CO}^2=(\overline{AO}^2+\overline{BO}^2)+(\overline{CO}^2+\overline{DO}^2)=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=5^2+7^2=74$

選 C。

(**D**)4.如圖，$\overline{AD}$是ΔABC的角平分線，其中$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=4$，$\overline{BD}=3$，則$\overline{CD}=?$

(A)3.2 (B)2.7 (C)3.6 (D)2.4 。



<解析>

設$\overline{CD}=x$，利用外分比性質

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$ ➔5:4=3:x

x=2.4

(**A**)5.小川和大普玩猜硬幣的遊戲，遊戲規則如下:

> 兩人先準備一些五元及十元的硬幣放在自己的口袋中，開始前每人各拿出若干枚硬幣緊握在手中，開始後輪流猜測兩人手中握有的硬幣總錢數，猜中的人就可以把對方手中握有的硬幣全部拿走。

若小川第一次手中握有 3 枚五元硬幣和 4 枚十元硬幣，並猜兩人手中握有的錢幣共 80 元，結果猜中了，則大普此次手中的硬幣總個數可能有幾枚?

(A)5 枚 (B)6 枚 (C)1 枚 (D)2 枚 。

<解析>設大普此次手中有 x 枚五元硬幣與 y 枚十元硬幣

3×5+4×10+5x+10y=80➔x+2y=5

可能有 3、4、5 枚硬幣，選 A。

x	5	3	1
y	0	1	2
X+y	5	4	3

(**B**)6. $(x+2)^4(x^2-3)^3$展開成一個 10 次多項式，則各項係數之和等於?

(A)-638 (B) -648 (C)-658 (D)-668 。

<解析>求各係數之和，令 x=1

原式=$(1+2)^4(1^2-3)^3$=81×(-8)=-648，選 B。

(D)7.小沛想對五顆不同重量且小於 100 公斤的石頭進行秤重，由於該磅秤只能測量 100 公斤以上的物體，得出 10 組數據為 102、103、108、110、111、115、116、116 、117、124 公斤，那麼這五顆石頭中最輕的是?

(A)46.5 (B)49.5 (C)47.5 (D)48.5 。

<解析>令五顆重量為 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$

➔兩顆的和最重= $x_4 + x_5$ =124，兩顆的和最輕= $x_1 + x_2$ =102

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < \begin{matrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_4 \end{matrix} < \begin{matrix} x_2 + x_4 \\ x_1 + x_5 \end{matrix} < \begin{matrix} x_2 + x_5 \\ x_3 + x_4 \end{matrix} < x_3 + x_5 < x_4 + x_5$$

$\therefore x_3 + x_4 = 116$ ， $x_2 + x_5 = 116$ ($x_3 + x_4$ ， $x_2 + x_5$ 排第 3 或第 4)

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 102 + 103 + 108 + \ldots.. + 124 = 1122$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 208.5$$

5 顆中最輕的重量=208.5-(x_4+x_3)-(x_2+x_5)=280.5-116-116=48.5。

二、填充題(每格 5 分，共 40 分)

1.設 n 為質數且 $\dfrac{n^3 + 3n^2 - 4n + 4}{n - 1}$ 亦是質數，求 n=__①__ 。

<解析>

$\dfrac{n^3 + 3n^2 - 4n + 4}{n - 1} = n^2 + 4n + \dfrac{4}{n - 1}$ ， $\because \dfrac{4}{n - 1} \in Z$ ➔ $n - 1 | 4$

且 n 為質數➔n=2、3、5

若 n=2 時➔4+8+4=16(不合)，n=3 時➔9+12+2=23(符合)

若 n=5 時➔25+20+1=46(不合)，n=3。

2.解 $(x^2 + 3x - 4)^2 + (2x^2 - 7x + 6)^2 = (3x^2 - 4x + 2)^2$ ，得 x=__②__ 。

<解析>令 A= $x^2 + 3x - 4$ ，B= $2x^2 - 7x + 6$ ➔A+B= $3x^2 - 4x + 2$

$A^2 + B^2 = (A + B)^2$ ， $A^2 + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ，2AB=0，AB=0

$(x^2 + 3x - 4)(2x^2 - 7x + 6) = 0$ ， $(x + 4)(x - 1)(2x - 3)(x - 2) = 0$

x=1、-4、$\dfrac{3}{2}$、2

3.若數列 (a_n) 滿足 $a_1=\frac{1}{7}$ ， $a_2=\frac{3}{7}$ 及 $a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n(1-a_n)$ $(n\geq 1)$ ，則 ：

$a_{100}-a_{101}+a_{102}-a_{103}+\ldots-a_{201}=$ ___③___ 。

<解析>① $a_1=\frac{1}{7}$ ， $a_2=\frac{3}{7}$

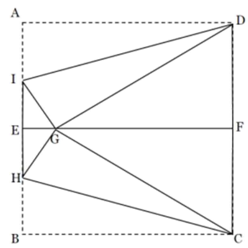
→ $a_3=\frac{7}{2}a_2(1-a_2)=(\frac{7}{2})(\frac{3}{7})(\frac{4}{7})=\frac{6}{7}$

→ $a_4=\frac{7}{2}a_3(1-a_3)=(\frac{7}{2})(\frac{6}{7})(\frac{1}{7})=\frac{3}{7}$

→ $a_5=\frac{7}{2}a_4(1-a_4)=(\frac{7}{2})(\frac{3}{7})(\frac{4}{7})=\frac{6}{7}$

② $a_3=a_5=a_7=\ldots=a_{101}=\frac{6}{7}$ ， $a_2=a_4=a_6=\ldots=a_{100}=\frac{3}{7}$

$a_{100}-a_{101}=a_{102}-a_{103}=\ldots=a_{200}-a_{201}=\frac{3}{7}-\frac{6}{7}=-\frac{3}{7}$ ，所求 $=-\frac{3}{7}\times 51=\frac{-153}{7}$ 。



4.如右圖，$\overline{EF}$ 為正方形 ABCD 之兩邊 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 中點的連線，今將 $\overline{BC}$ 沿 $\overline{HC}$ 摺疊使與 $\overline{GC}$ 重合，將 $\overline{AD}$ 沿 $\overline{ID}$ 摺疊使與 $\overline{GD}$ 重合，試求 $\angle DIG=$ ___④___ 。

<解析> $\overline{GD}=\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{BC}=\overline{CG}$

$\therefore \Delta CDG$ 為正三角形， $\angle CDG=60°$

$\angle ADG=90°-60°=30°$

$\angle GDI=15°$ ， $\therefore \angle DIG=90°-15°=75°$ 。

5.方程式 $\left|x-|2x+1|\right|=3$ ，求 x= ___⑤___ 。

<解析> $x-|2x+1|=3$ 或 $x-|2x+1|=-3$

(1)若 $2x+1\geq 0$ → $(x\geq -\frac{1}{2})$ ，x-(2x+1)=3，x=-4(不合)

(2)若 $2x+1<0$ → $(x<-\frac{1}{2})$ ，x+(2x+1)=3，x= $\frac{2}{3}$ (不合)

(3)若 $2x+1\geq 0$ → $(x\geq -\frac{1}{2})$ ，x-(2x+1)=-3，x=2 (符合)

(4)若 $2x+1<0$ → $(x<-\frac{1}{2})$ ，x+(2x+1)=-3，x= $-\frac{4}{3}$ (符合)

$\therefore x=2$ 或 $x=-\frac{4}{3}$ 。

6.化簡 $S=1^2-2^2+3^2-4^2+......-(2n)^2=$ ___⑥___ 。

<解析> $S=(1+2)(1-2)+(3+4)(3-4)+......+(2n-1-2n)(2n-1+2n)$

$=(-3)+(-7)+......+(-4n+1)=\frac{(-3)+(-4n+1)}{2}\times\left[\frac{(-4n+1+3)}{-4}+1\right]=(-2n-1)n=-2n^2-n$ 。

7. Add 1 to the numerator and denominator of a certain fraction and it reduces to $\frac{2}{3}$.

Subtract 1 from each and it reduces to $\frac{1}{2}$. What is the fraction___⑦___ 。

<解析>設原分數 $\frac{a}{b}$ ➔ $\frac{a+1}{b+1}=\frac{2}{3}$ ， $\frac{a-1}{b-1}=\frac{1}{2}$

$\begin{cases}3a+3=2b+2\\2a-2=b-1\end{cases}$ ➔ $\begin{cases}a=3\\b=5\end{cases}$ ，原分數= $\frac{3}{5}$ 。

8.在一個口袋中裝有 5 個白球和 3 個黑球，這些球除顏色外完全相同，從中摸出 3 個球，

至少摸到 2 個黑球的機率等於___⑧___ 。

<解析>摸出順序 (黑黑白)(白黑黑)(黑白黑)(黑黑黑)

$\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{16}{56}=\frac{2}{7}$ 。

三、計算題(共 32 分) ※沒寫計算過程不予計分

1. A man bought a number of articles for \$20. After losing 3 of the articles, he got \$25 by selling the rest at \$0.75 a piece more than they cost. How many articles did he sell?

<解析>假設他賣了 x 個

$(\frac{20}{x-3}+0.75)x=25$ ➔ $3x^2-11x-300=0$ ➔ $(x-12)(3x+25)=0$

➔x=12(負的不合)

2．已知 x、y 為正整數，若 2018，1086，3183 分別被自然數 x 除時，所得餘數都是 y，則 x－y =?(12 分)

<解析>3183-2018=1165，2018-1086=932

(1165，932)=233；2018÷233=8……154

X=233，y=154，x-y=233-154=79。

3．某段公路由上坡、平路、下坡三個等長的路段組成，已知一輛汽車在三個路段上行駛的平均速度分別為 x, y, z ，則此輛汽車在這段公路上行駛的平均速度為?(10 分)

<解析>設每段路為 a

上坡時間=$\frac{a}{x}$ ，平坡時間=$\frac{a}{y}$ ，下坡時間=$\frac{a}{z}$

總時間=$\frac{a}{x}+\frac{a}{y}+\frac{a}{z}=a\times(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$

平均速度=a×3÷〔$a\times(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$〕=$\frac{3xyz}{xy+yz+xz}$