

2018 第十四屆  國際數學競賽複賽(台灣)
2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

國
中
一
年
級
試
卷

考試時間：90 分鐘 卷面總分：100 分

《考試時間尚未開始前請勿翻閱》

2018 第十四屆 國際數學競賽複賽(台灣)

2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 4 分，共 28 分)

- (**B**) 1. 若有一數 $n=20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 70 \cdot 80 \cdot 90 \cdot 100 \cdot 110 \cdot 120 \cdot 130$ 。則下列不是 n 的因數的最小質數是 (A) 19 (B) 17 (C) 13 (D) 以上皆非。

<解析> $n=2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 11 \times 12 \times 13 \times 1000 \dots 0$

n 的質因數=2、3、5、7、11、13，不是 n 的質因數最小=17，選 B。

- (**C**) 2. 定義 $\langle \rangle$ 是一種數碼加法的新運算符號，其算法如下：

將 $\langle \rangle$ 內正整數的每個數碼加起來，這個計算要持續到答案為一位數為止。例如：
 $\langle 1573 \rangle = \langle 1+5+7+3 \rangle = \langle 16 \rangle = \langle 1+6 \rangle = \langle 7 \rangle = 7$ ，請問下列哪一個選項的值與 $\langle 7293 \rangle$ 相等？

(A) $\langle 2371 \rangle$ (B) $\langle 3284 \rangle$ (C) $\langle 5736 \rangle$ (D) $\langle 7418 \rangle$ 。

<解析> $\langle 7293 \rangle = \langle 7+2+9+3 \rangle = \langle 21 \rangle = \langle 2+1 \rangle = \langle 3 \rangle = 3$

(A) $\langle 2371 \rangle = \langle 2+3+7+1 \rangle = \langle 13 \rangle = \langle 1+3 \rangle = \langle 4 \rangle = 4$ (不合)

(B) $\langle 3284 \rangle = \langle 3+2+8+4 \rangle = \langle 17 \rangle = \langle 1+7 \rangle = \langle 8 \rangle = 8$ (不合)

(C) $\langle 5736 \rangle = \langle 5+7+3+6 \rangle = \langle 21 \rangle = \langle 2+1 \rangle = \langle 3 \rangle = 3$ (符合)，選 C。

- (**A**) 3. 設 P 、 Q 、 R 均為非負整數且 $P+Q+R=10$ ，求 $P \cdot Q \cdot R + P \cdot Q + Q \cdot R + R \cdot P$ 的最大值為多少？(A) 69 (B) 67 (C) 65 (D) 63。

<解析> $PQR + PQ + QR + RP = (P+1)(Q+1)(R+1) - (P+Q+R) - 1 = (P+1)(Q+1)(R+1) - 11$
 $= 5 \times 4 \times 4 - 11 = 69$ ，選 A。

$(P+1+Q+1+R+1=10+3=13 \rightarrow P+1=5, Q+1=4, R+1=4)$ ，使 $(P+1)(Q+1)(R+1)$ 最大

(A) 4. 右圖是一個 3×3 的正方形，求圖中 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \dots + \angle 9 = ?$

(A) 405 度 (B) 450 度 (C) 360 度 (D) 315 度。

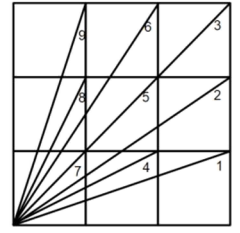
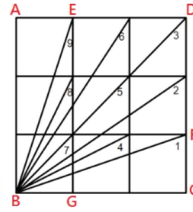
<解析>

$\triangle BEG$ 和 $\triangle FBC$ 全等

$\angle 1 + \angle 9 = 90^\circ$ 同理 $\angle 2 + \angle 6 = 90^\circ$, $\angle 4 + \angle 8 = 90^\circ$

$\angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 45^\circ$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \dots + \angle 9 = 3 \times 90^\circ + 45^\circ \times 3 = 405^\circ$, 選 A。



(A) 5. 請你計算 $-13\frac{1}{2} \times (0.25 - 1\frac{11}{12}) \div \frac{1}{2} \div \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = ?$

(A) $78\frac{2}{3}$ (B) $76\frac{1}{3}$ (C) $77\frac{1}{2}$ (D) $79\frac{3}{4}$ 。

<解析> $-\frac{27}{2} \times (\frac{1}{4} - \frac{23}{12}) \times 2 \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 80 - \frac{4}{3} = 78\frac{2}{3}$ 。

(A) 6. 滿足 $-\frac{3+x}{2} > \frac{2-3x}{3} + 6$ 的最小整數是?

(A) 17 (B) 18 (C) 16 (D) 19。

<解析> $-3(3+x) > 2(2-3x) + 36 \rightarrow x > 16\frac{1}{3}$, 最小整數=17

(D) 7. 甲、乙兩村莊因水管汰舊換新無法正常供水，故採取

停水措施來因應，如右表所示。已知筱珮家住甲村莊，

小凱家住乙村莊，兩人商議，若其中有一人家中停水，

則可到另一人家中借水用。若 7 月 1 日兩家同時停水，

且不正常供水狀態持續，則下列哪一天，筱珮家與小凱家兩家同時無水可

用?(A) 8 月 9 日 (B) 8 月 31 日 (C) 9 月 20 日 (D) 10 月 9 日。

自來水廠公告	
甲村	供 4 天水停 1 天
乙村	供 3 天水停 1 天

<解析> $(5 \cdot 4) = 20$, 即 7 月 1 日後，每過 20 天，兩家均無水可用 \rightarrow 兩處均停水日為 7/21、

8/10、8/30、9/19、10/9... 選 D。

二、填充題(每格 5 分，共 40 分)

1. 將一系列有理數 $1, -\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, -\frac{4}{15}, \frac{5}{24}, \dots$ 排列成下列形式：

第一行：1；第二行： $-\frac{2}{3}, \frac{3}{8}$ ；第三行： $-\frac{4}{15}, \frac{5}{24}, -\frac{6}{35}$ ；……，按此規律，請寫出第 10 行從左邊數第 7 個數是 ①。

<解析>第一行： $-\frac{2}{1 \times 3}, \frac{3}{2 \times 4}$ ；第三行： $-\frac{4}{3 \times 5}, \frac{5}{4 \times 6}, -\frac{6}{5 \times 7}$ ；第四行： $-\frac{7}{6 \times 8}, \frac{8}{7 \times 9}, -\frac{9}{10 \times 11} \dots$

故第 10 行分子： $(1+9) \times 9 \div 2 = 45$ ，第 7 個 = -46、47、-48、49、-50、51、-52

故第 10 行分母： $51 \times 53 = 2703$

則此數 = $-\frac{52}{2703}$

2. 若數列 (a_n) 滿足 $a_1 = \frac{1}{7}$ ， $a_2 = \frac{3}{7}$ 及 $a_{n+1} = \frac{7}{2}a_n(1-a_n)$ ($n \geq 1$)，則

$a_{100} - a_{101} + a_{102} - a_{103} + \dots - a_{201} =$ ②。

<解析>① $a_1 = \frac{1}{7}$ ， $a_2 = \frac{3}{7}$

$$\rightarrow a_3 = \frac{7}{2}a_2(1-a_2) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{6}{7}$$

$$\rightarrow a_4 = \frac{7}{2}a_3(1-a_3) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{3}{7}$$

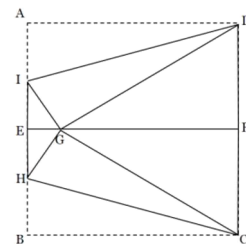
$$\rightarrow a_5 = \frac{7}{2}a_4(1-a_4) = \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{6}{7}$$

$$\textcircled{2} a_3 = a_5 = a_7 = \dots = a_{101} = \frac{6}{7}，a_2 = a_4 = a_6 = \dots = a_{100} = \frac{3}{7}$$

$$a_{100} - a_{101} = a_{102} - a_{103} = \dots = a_{200} - a_{201} = \frac{3}{7} - \frac{6}{7} = -\frac{3}{7}$$

$$\text{所求} = -\frac{3}{7} \times 51 = -\frac{153}{7}。$$

3. 如右圖， \overline{EF} 為正方形 $ABCD$ 之兩邊 \overline{AB} 、 \overline{CD} 中點的連線，今將 \overline{BC} 沿 \overline{HC} 摺疊使與 \overline{GC} 重合，將 \overline{AD} 沿 \overline{ID} 摺疊使與 \overline{GD} 重合，試求 $\angle DIG = \underline{\quad ③ \quad}$ 。



<解析>

$$\overline{GD} = \overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BC} = \overline{CG}$$

$\therefore \triangle CDG$ 為正三角形， $\angle CDG = 60^\circ$

$$\angle ADG = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\angle GDI = 15^\circ, \therefore \angle DIG = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ。$$

4. 方程式 $|x - |2x + 1|| = 3$ ，求 $x = \underline{\quad ④ \quad}$ 。

<解析> $x - |2x + 1| = 3$ 或 $x - |2x + 1| = -3$

(1) 若 $2x + 1 \geq 0 \rightarrow (x \geq -\frac{1}{2})$ ， $x - (2x + 1) = 3$ ， $x = -4$ (不合)

(2) 若 $2x + 1 < 0 \rightarrow (x < -\frac{1}{2})$ ， $x + (2x + 1) = 3$ ， $x = \frac{2}{3}$ (不合)

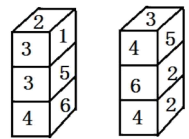
(3) 若 $2x + 1 \geq 0 \rightarrow (x \geq -\frac{1}{2})$ ， $x - (2x + 1) = -3$ ， $x = 2$ (符合)

(4) 若 $2x + 1 < 0 \rightarrow (x < -\frac{1}{2})$ ， $x + (2x + 1) = -3$ ， $x = -\frac{4}{3}$ (符合)

$$\therefore x = 2 \text{ 或 } x = -\frac{4}{3}。$$

5. There are 6 same squares, and the numbers 1,2,3,4,5,6 are written in same order on the surface of each cube. The picture as below. What is the sum of the bottom for two cylinders in the graph ⑤。

<翻譯>現有 6 個完全相同的正方體，將數字 1,2,3,4,5,6 按相同的順序寫在每個正方體的表面，擺成圖中樣子，則圖中兩個柱體下底面的點數之和是 ⑤。



	2		
3	4	6	1
	5		

<解析>

底面=3+2=5

6. 請問 n 等於多少時，可以使 n 和 $4^{\frac{n-1}{n+1}}$ 都是整數，符合這樣的 n 值有 ⑥ 個。

<解析>令 $\frac{n-1}{n+1}=1 \rightarrow n$ 不合。 $\frac{n-1}{n+1}=2 \rightarrow n=-3$ (符合)。 $\frac{n-1}{n+1}=3 \rightarrow n=-2$ (符合)。

$\frac{n-1}{n+1}=4 \rightarrow$ 不合。 $\frac{n-1}{n+1}=0 \rightarrow n=1$ (符合)。 $\frac{n-1}{n+1}=-1 \rightarrow n=0$ (符合)。 $\frac{n-1}{n+1}=-3 \rightarrow n=-1$ (符合)，共 5 個。

7. 字母 I 、 M 、 C 代表整數，如果 $I \times M \times C=240$ ， $I \times M+C=46$ ， $I+M \times C=64$ ，請問 $I+M+C=$ ⑦

<解析> $240=2 \times 3 \times 40=3 \times 4 \times 20=4 \times 6 \times 10=5 \times 6 \times 8$

若 $I=4$ $M=10$ $C=6$ ， $I \times M+C=4 \times 10+6=46$ ； $I+M \times C=4+10 \times 6=64$

故 $I+M+C=4+10+6=20$

8. 小沛想對五顆不同重量且小於 100 公斤的石頭進行秤重，由於該磅秤只能測量 100 公斤以上的物體，因此小沛將兩顆石頭一起秤，得出 10 組數據為 102、103、108、110、111、115、116、116、117、124 公斤，那麼這五顆石頭中最輕的是 ⑧。

<解析>令五顆重量為 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$

→ 兩顆的和最重 = $x_4 + x_5 = 124$ ，兩顆的和最輕 = $x_1 + x_2 = 102$

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < \begin{matrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_4 \end{matrix} < \begin{matrix} x_2 + x_4 \\ x_1 + x_5 \end{matrix} < \begin{matrix} x_2 + x_5 \\ x_3 + x_4 \end{matrix} < x_3 + x_5 < x_4 + x_5$$

∴ $x_3 + x_4 = 116$ ， $x_2 + x_5 = 116$ ($x_3 + x_4$ ， $x_2 + x_5$ 排第 3 或第 4 名)

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 102 + 103 + 108 + \dots + 124 = 1122$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 280.5$$

$$5 \text{ 顆中最輕的重量} = 280.5 - (x_4 + x_3) - (x_2 + x_5) = 280.5 - 116 - 116 = 48.5。$$

三、計算題(共 32 分) ※沒寫計算過程不予計分

1. The four-digit 2,0,1 and 8. The sum of them is 11. From 0000 to 2018, how many of the sum is 11 for four-digit? (10 分)

<翻譯>四位數 2018，其各位數字之和為 11。試求從 0000 至 2018 中，出現多少個四位數符合和為 11?(10 分)

<解析> $\overline{10ab}$ 需滿足 $a+b=10$ 共 9 個， $\overline{11ab}$ 需滿足 $a+b=9$ 共 10 個， $\overline{12ab}$ 需滿足 $a+b=8$ 共 9 個，……所以 $\overline{1***}$ 的共 $9+10+9+8+\dots+2=63$ 個；而 $\overline{2***}$ 的截止目前有 2009 和 2018 兩個。總共 65 個。

2. x 為任意實數，則 $y = |2x+1| + |3-x| + |2-3x|$ 的最小值是? (12 分)

<解析> $y = |2x+1| + |3-x| + |2-3x|$ ， $-\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 0 ，中位數 = $\frac{2}{3}$

$$y = \left| 2 \times \frac{2}{3} + 1 \right| + \left| 3 - \frac{2}{3} \right| + 0 = \frac{7}{3} + \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

3. 由 1、2、3、...9 中任取三相異數組成三位數，求這些三位數的和？(10 分)

①

1		
↓	↓	↓
8	8	7

出現 $8 \times 7 = 56$ 次 $\rightarrow 100 \times 1 \times 56$

	1	
↓	↓	↓
8	8	7

出現 $8 \times 7 = 56$ 次 $\rightarrow 10 \times 1 \times 56$

		1
↓	↓	↓
8	8	7

出現 $8 \times 7 = 56$ 次 $\rightarrow 1 \times 1 \times 56$

和 = $56 \times 1 \times 111$

②

2		
↓	↓	↓
8	8	7

出現 $8 \times 7 = 56$ 次 $\rightarrow 100 \times 2 \times 56$

	2	
↓	↓	↓
8	8	7

出現 $8 \times 7 = 56$ 次 $\rightarrow 10 \times 2 \times 56$

		2
↓	↓	↓
8	8	7

出現 $8 \times 7 = 56$ 次 $\rightarrow 1 \times 2 \times 56$

和 = $56 \times 2 \times 111$

.....

⑨

9		
↓	↓	↓
8	8	7

出現 $8 \times 7 = 56$ 次 $\rightarrow 100 \times 9 \times 56$

	9	
↓	↓	↓
8	8	7

出現 $8 \times 7 = 56$ 次 $\rightarrow 10 \times 9 \times 56$

		9
↓	↓	↓
8	8	7

出現 $8 \times 7 = 56$ 次 $\rightarrow 1 \times 9 \times 56$

同理，總和 = $56 \times 111 \times (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 279720$ 。