# 2018 第十四屆IMC國際數學競賽複賽(台灣)

## 2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

# 國中三年級試卷

**考試時間：90 分鐘　　卷面總分：100 分**

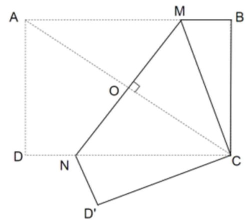
**《考試時間尚未開始前請勿翻閱》**

# 2018 第十四屆 IMC 國際數學競賽複賽(台灣)
## 2018 Fourteenth International Mathematics Contest(Taiwan)

※請將答案寫在答案卷上

一、選擇題(每題 4 分，共 32 分)

( **B** )1.如右圖，有一張長方形紙片 ABCD，若小瑋將 A 點摺到 C 點，使得 A、C 兩點重合，D 點落在 D′ 點上，摺痕為$\overline{MN}$，且$\overline{AB}=12$ $\overline{BC}=9$，則$\overline{MN}=?$ (A) 11 (B) $\dfrac{45}{4}$ (C) $\dfrac{45}{2}$ (D) $\dfrac{75}{8}$ 。




<解析>△AOM≅△CON(ASA 全等)，$\overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{OM}=\overline{ON}$

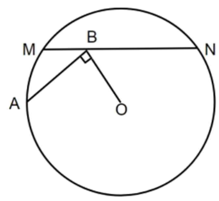
$\overline{AC}=\sqrt{9^2+12^2}=15$

$\because \Delta AOM \sim \Delta ABC$

$\therefore \overline{OM}:\overline{BC}=\overline{AO}:\overline{AB}$，$\overline{OM}:9=\dfrac{15}{2}:12$

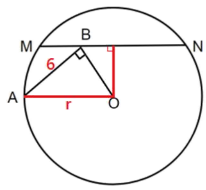
$\overline{OM}=\dfrac{45}{8}$ ➔ $\overline{MN}=2\overline{OM}=\dfrac{45}{4}$，選 B。

( **A** )2.如右圖，$\overline{MN}$為圓$O$中的弦，$\overline{MN}$上有一點B，若$\overline{AB}\perp\overline{OB}$，且$\overline{AB}=6$，$\overline{MB}:\overline{BN}=1:3$，則$\overline{MN}=?$ (A) $8\sqrt{3}$ (B) $12\sqrt{3}$ (C) 8 (D) 12。




<解析>設$\overline{MB}=a$，$\overline{BN}=3a$，則$\overline{BH}=a$，$\overline{HN}=2a$

又設圓$O$的半徑為 r，則在△OAB 中，$\overline{BO}^2=r^2-36$




△OAB 中，$\overline{OH}^2=(r^2-36)-a^2$

△ONH 中，$\overline{OH}^2=r^2-(2a)^2$ ➔ $r^2-36-a^2=r^2-4a^2$

$a^2=12$，$a=2\sqrt{3}$，$\overline{MN}=4a=8\sqrt{3}$，選 A。

( **B** )3.將正整數依右圖方式排列，排列次序如箭頭所示。在此圖形中，我們稱橫的為列，直的為行，例如：第 5 列，第 3 行的數是 19，若 1000 這個數位於第 m 列，第 n 行，則 m-n=?

(A) 7 (B) -7 (C) 5 (D) -5。

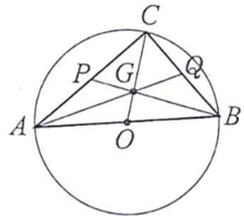
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |
| 2 | 3 | 8 | 15 | 24 | 35 |
| 5 | 6 | 7 | 14 | 23 | 34 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 22 | 33 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 32 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |

<解析> $31^2<1000<32^2$ ➔ 1000 位於第 32 行，n=32。

1024、1023、1022、………依次位於第 32 行之第一列、第二列、第三列、...

故 1000 位於第 25 列，m=25，m-n=25-32=-7，選 B。

( **A** )4.如右圖，$\overline{AB}$為圓 O 的直徑，P、Q 為$\overline{AC}$、$\overline{BC}$的中點，$\overline{AQ}$、$\overline{BP}$相交於 G 點，若圓 O 面積為$36\pi$平方單位，則$\overline{OG}$=?(A)2 (B)3 (C)4 (D)5。




<解析>圓 O 面積=$36\pi = \overline{AO}^2 \times \pi$ ➔ $\overline{AO} = 6$ (負的不合)

$\because \overline{AB}$為圓 O 的直徑

$\therefore \angle C = 90°$ ➔ $\overline{CO} = \overline{AO} = \overline{BO} = 6$

$\overline{OG} = \frac{1}{3}\overline{CO} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$，選 A。

( **A** )5.設 P、Q、R 均為非負整數且 P+Q+R=10，求 P‧Q‧R+P‧Q+Q‧R+R‧P 的最大值為多少?(A)69 (B)67 (C)65 (D)63。

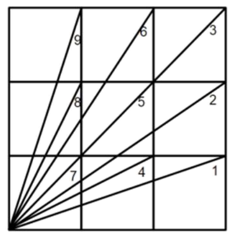
<解析>$PQR + PQ + QR + RP = (P+1)(Q+1)(R+1) - (P+Q+R) - 1 = (P+1)(Q+1)(R+1) - 11$

=5×4×4-11=69，選 A。

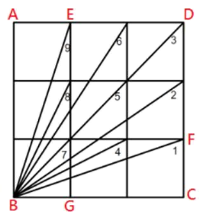
(P+1+Q+1+R+1=10+3=13➔P+1=5，Q+1=4，R+1=4，使(P+1)(Q+1)(R+1)最大)

( **A** )6.右圖是一個 3×3 的正方形，求圖中∠1+∠2+∠3+......+∠9=?

(A)405 度 (B)450 度 (C)360 度 (D)315 度 。




<解析>




$\Delta BEG$和$\Delta FBC$全等

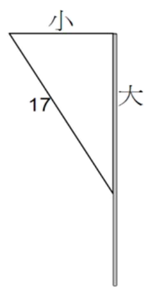
$\angle 1 + \angle 9 = 90°$ 同理 $\angle 2 + \angle 6 = 90°$，$\angle 4 + \angle 8 = 90°$

$\angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 45°$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + .... + \angle 9 = 3 \times 90° + 45° \times 3 = 405°$，選 A。

( **D** )7.如右圖，將一直角三角形黏貼在吸管上，並以吸管為軸旋轉一周。已知原直角三角形的兩股長相差 7，斜邊長為 17，則旋轉後的立體圖形的表面積是多少平方單位?(吸管的厚度不考慮)

(A) $95\pi$ (B) $100\pi$ (C) $136\pi$ (D) $200\pi$ 。

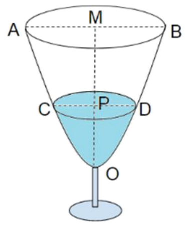



<解析>旋轉後的圓錐體，設兩股長分別為 x，x+7

$x^2 + (x+7)^2 = 17^2$，$x^2 + 7x - 120 = 0$，$x = 8$ 或 $x = -15$ (負的不合)

直角三角形三邊長為 8、15、17，表面積=$8^2\pi + 8\pi \times 17 = 200\pi$ 平方單位，選 D。

( **D** )8.如右圖，有一杯子的造型曲線如拋物線，其中 O 為頂點，M 為 $\overline{AB}$ 的中點，將水倒入杯中，水面寬 $\overline{CD}$=4 公分時，水高 $\overline{PO}=\frac{8}{9}$ 公分，已知杯口寬 $\overline{AB}$=12 公分，求 $\overline{MO}$ 為多少公分?(A) $8\sqrt{2}$ (B) 9 (C) 8.5 (D) 8。




<解析>令 O 為原點(0,0)，則設此二次函數為 $y=ax^2$

$x=2$，$y=\frac{8}{9}$ 代入➔ $\frac{8}{9}=4a$，$a=\frac{2}{9}$，得 $y=\frac{2}{9}\times6^2=8$，$\overline{MO}=8$ 公分，選 D。

二、填充題(每格 4 分，共 32 分)

1.設 n 為質數且 $\frac{n^3+3n^2-4n+4}{n-1}$ 亦是質數，求 n=__①__。

<解析>

$\frac{n^3+3n^2-4n+4}{n-1}=n^2+4n+\frac{4}{n-1}$，$\because \frac{4}{n-1}\in Z$ ➔ $n-1|4$

且 n 為質數➔n=2、3、5

若 n=2 時➔4+8+4=16(不合)，n=3 時➔9+12+2=23(符合)

若 n=5 時➔25+20+1=46(不合)，n=3。

2.當 n!表示為正整數 1、2、3….n 的相乘，例如 3!=1×2×3；4!=1×2×3×4，若 a 是 0、1、2、3、...9 中某個數字，且當 15!=130767a368000 時，a=__②__。

<解析> 15!必為 9 的倍數➔1+3+0+7+6+7+a+3+6+8=41+a 為 9 的倍數

故 a=4。

3.解 $(x^2+3x-4)^2+(2x^2-7x+6)^2=(3x^2-4x+2)^2$，得 x=__③__。

<解析>令 A=$x^2+3x-4$，B=$2x^2-7x+6$ ➔A+B=$3x^2-4x+2$

$A^2+B^2=(A+B)^2$，$A^2+B^2=A^2+2AB+B^2$，2AB=0，AB=0

$(x^2+3x-4)(2x^2-7x+6)=0$，$(x+4)(x-1)(2x-3)(x-2)=0$，x=1、-4、$\frac{3}{2}$、2。

4.P 為 $\Delta ABC$ 內一點，已知 $\Delta PBC:\Delta PCA:\Delta PAB=1:2:3$，$\Delta ABC$ 三邊上的高 $h_a=3$，$h_b=5$，$h_c=4$，則 P 到 $\overline{BC}$ 的距離是__④__。

<解析>令 P 到 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的距離分別是 $h_1$、$h_2$、$h_3$

$\because \frac{\Delta PBC}{\Delta ABC}=\frac{1}{6}$，$\therefore \frac{\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times h_1}{\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times h_a}=\frac{1}{6}$ ➔ $\frac{h_1}{3}=\frac{1}{6}$ ➔ $h_1=\frac{1}{2}$。

5.一個正整數，如果加上 100 是一個完全平方數，如果加上 168 則是另一個完全平方數，則這個數字是___⑤___。

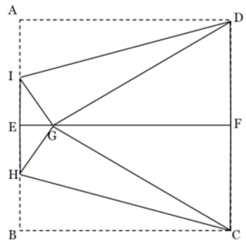
<解析>令此數為 x(正整數)

$$\begin{cases} x+100=p^2 \\ x+168=q^2 \end{cases}，p、q\in N \Rightarrow q^2-p^2=68$$

$(q+p)(q-p)=68\times1=34\times2=17\times4$，$p$、$q$ 同時為奇數(偶數)

$$\begin{cases} q+p=34 \\ q-p=2 \end{cases}$$ ➔p=16，q=18，代入 x+100=16$^2$=256，x=156。

6. 如右圖，$\overline{EF}$ 為正方形 ABCD 之兩邊 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 中點的連線，今將 $\overline{BC}$ 沿 $\overline{HC}$ 摺疊使與 $\overline{GC}$ 重合，將 $\overline{AD}$ 沿 $\overline{ID}$ 摺疊使與 $\overline{GD}$ 重合，試求 $\angle DIG=$___⑥___。



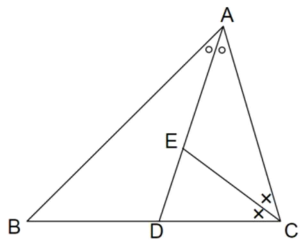

<解析>$\overline{GD}=\overline{AD}=\overline{DC}=\overline{BC}=\overline{CG}$

$\therefore \Delta CDG$ 為正三角形，$\angle CDG=60°$

$\angle ADG=90°-60°=30°$

$\angle GDI=15°$，$\therefore \angle DIG=90°-15°=75°$。

7.如右圖，$\overline{AD}$、$\overline{CE}$ 分別為 $\angle BAC$、$\angle ACB$ 的角平分線，$\overline{AB}$=6、$\overline{AC}$=4、$\overline{BC}$=5，則 $\Delta CDE:\Delta CDA$ 的比值為___⑦___。




<解析>$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:2$，$\overline{CD}=2$

$\overline{AE}:\overline{DE}=\overline{AC}:\overline{CD}=2:1$

$\therefore \overline{DE}:\overline{DA}=1:(2+1)=1:3$

➔ $\Delta CDE:\Delta CDA=1:3=\dfrac{1}{3}$。

8.小沛想對五顆不同重量且小於 100 公斤的石頭進行秤重，由於該磅秤只能測量 100 公斤以上的物體，得出 10 組數據為 102、103、108、110、111、115、116、116 、117、124 公斤，那麼這五顆石頭中最輕的是__⑧__ 。

<解析>令五顆重量為 $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $x_4$ 、 $x_5$ 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$

➔兩顆的和最重= $x_4 + x_5$ =124，兩顆的和最輕= $x_1 + x_2$ =102

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < \frac{x_2 + x_3}{x_1 + x_4} < \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_5} < \frac{x_2 + x_5}{x_3 + x_4} < x_3 + x_5 < x_4 + x_5$$

$\therefore x_3 + x_4 = 116$ ， $x_2 + x_5 = 116$ ( $x_3 + x_4$ ， $x_2 + x_5$ 排第 3 或第 4 名)

$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 102 + 103 + 108 + ..... + 124 = 1122$

$\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 208.5$

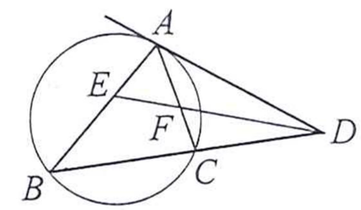
5 顆中最輕的重量=208.5-( $x_4$ + $x_3$ )-( $x_2$ + $x_5$ )=280.5-116-116=48.5。

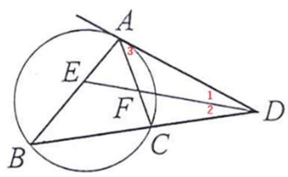
三、計算題(每格 12 分，共 36 分) ※沒寫計算過程不予計分

1.如右圖，過圓內接△ABC 的頂點 A 作切線交 $\overline{BC}$ 的延長線於 D，$\angle ADB$ 的角平分線交 $\overline{AC}$ 於 F，交 $\overline{AB}$ 於 E。

(1)求證： $\overline{AE} = \overline{AF}$ 。

(2)若 $\angle BAC = 60°$ ，求 $\angle AED$ 的度數是?




<解析> (1) $\overline{DE}$ 平分 $\angle ADB$ ➔ $\angle 1 = \angle 2$

$\overleftrightarrow{AD}$ 切圓於 A， $\overline{AC}$ 為一弦， $\angle 3 =$ 弧 AC× $\frac{1}{2}$

$\angle B$ 是弧 AC 的圓周角➔ $\angle B =$ 弧 AC× $\frac{1}{2} = \angle 3$

$\angle AEF$ 為△BDE 的外角， $\angle AEF = \angle 2 + \angle B$

同理 $\angle AFE = \angle 1 + \angle 3$ 又 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle B$

$\angle AEF = \angle AFE$ ➔ $\overline{AE} = \overline{AF}$ ，得證。

(2) $\overline{AE} = \overline{AF}$ 又 $\angle BAC = 60°$ ， $\angle AED = 60°$

2.有一火車在 a 時 b 分(a、b 為整數)，離開火車站。行駛 8 公里後，司機發現他錶上的分針與時針恰重疊，假設在這 8 公里中，火車的平均時速為 33 公里，求 a、b 之值?

<解析>設 a 時 m 分兩針重疊，$0 \le a \le 11$，則 $5a+\frac{m}{12}=m$ ➔ $m=\frac{60}{11}a$

過去 8 公里花了($60\times\frac{8}{33}$)分=$\frac{160}{11}$分=$14\frac{6}{11}$分

又因火車在整數的「分」離開車站➔ $b+14\frac{6}{11}=m=\frac{60}{11}a$

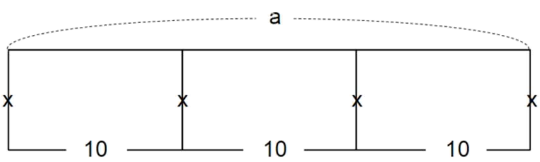
➔ $b+14=\frac{60}{11}a-\frac{6}{11}=5a+\frac{5a-6}{11}$ 為整數，5a-6 為 11 的倍數

➔取 a=10，m=$\frac{600}{11}=54\frac{6}{11}$分，$54\frac{6}{11}-14\frac{6}{11}=40$ (分)，於是 a=10，b=40。

3.如圖，小麥在他的牧場用 90 公尺的鐵絲網(圖形粗線部分)，圍成長方形的養羊區並以鐵絲網將此養羊區分成 3 格，每格出口是 10 公尺，設長方形的寬是 x 公尺，長是 a 公尺，則(1)a=?(以 x 表示)

(2)不計鐵絲網所占的位置，那麼養羊區最大面積是多少?

<解析>




(1)4x+a+(a-30)=90

4x+2a=120

➔a=60-2x

(2)令養羊區面積為 y 公尺

$$y=x\times a=x\times(60-2x)=-2x^2+60x=-2(x^2-30x+225)+450=-2(x-15)^2+450$$

y 最大值是 450，養羊區最大面積是 450 平方公尺。