

2017 年 IMC 國際數學競賽 數學菁英集訓營

國小六年級 結訓考解答

姓名：_____

得分：_____

◎ 第1-16題請將答案填寫在下面答案表內！

◎ 第17-18題需在試題空白處寫出計算過程，否則不予計分！

選擇題	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	B	B	B	D	D	B	D	A
填空題	9	10	11	12	13	14	15	16
答 案	7839	785	100.4	4.5	225	1/36	192	8 1/3

一、選擇題（每小題 5 分，共 40 分）

1. Given : $X = 20\frac{1}{15} \times 15\frac{1}{20} - 25\frac{1}{10} \times 12\frac{1}{50}$, then which of the following best describes X?

- A. $X=0$ B. $0 < X < 0.5$ C. $0.5 < X < 1$ D. $X=1$

答案：B

翻譯：已知 $X = 20\frac{1}{15} \times 15\frac{1}{20} - 25\frac{1}{10} \times 12\frac{1}{50}$ ，那麼（ ）。

解答： $X = 302\frac{1}{300} - (300 + \frac{25}{50} + \frac{12}{10} + \frac{1}{500}) = 2 - \frac{17}{10} - \frac{1}{500} = \frac{149}{500}$

2. 將六個連續數字分別填入算式“ $\frac{\square}{\square \times \square} + \frac{\square}{\square \times \square} = 1$ ”的“□”中，每個“□”中只填一個，使得這個等式成立，那麼滿足條件的六個數字最小是（ ）。

- A. 0~5 B. 1~6 C. 2~7 D. 3~8

答案：B

解答： $\frac{5}{1 \times 6} + \frac{2}{3 \times 4} = 1$

3. 甲、乙兩人沿450公尺環形跑道練習跑步，兩人同時同地反方向出發。相遇時甲比乙多跑了50公尺，之後乙把速度提高20%，如果甲希望下次恰好在出發地點遇到乙，則需要把速度（ ）。

- A. 降低25% B. 降低23.2% C. 降低20% D. 降低16.8%

答案：B

解答： $V_{甲}:V_{乙}=250:200=5:4=V_{乙}':V_{甲}'$ ，

$$V_{乙}' = \frac{6}{5} V_{乙}, V_{甲}' = \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} V_{乙} = \frac{96}{125} V_{甲}, \text{下降} \frac{29}{125} = 23.2\%$$

4. 一個自然數有 m 個因數，這個自然數的立方恰有 m^2 個因數，那麼這個自然數不會是（ ）。 A. 2013 B. 2014 C. 2015 D. 2016

答案：D

解答： $2013=3 \times 11 \times 61$ ， $2014=2 \times 19 \times 53$ ， $2015=5 \times 13 \times 31$ ， $2016=2^5 \times 3^2 \times 7$
前三個數都有8個因數，立方有64個因數，排除後得2016不符

5. A、B、C、D四位選手在預測今天誰得金牌，

A說：“C一定得不了金牌。” B說：“我和D肯定有一人能得金牌。”

C說：“如果D得金牌則B也能得金牌。” D說：“我的名次肯定比C高。”

結果四人中獲得金牌的兩名選手猜對了，沒得金牌的選手猜錯了，那麼獲得金牌的選手是（ ）。 A. A和D B. B和D C. C和D D. B和C

答案：D

解答：(1) A對A得 \Rightarrow C錯 \Rightarrow D得B未得 \Rightarrow B對B得，矛盾；

(2) A錯A未得 \Rightarrow C得 \Rightarrow B得D未得 \Rightarrow B對D錯；

故B和C得了金牌。

6. 已知圖中九個字母分別代表1至9中的不同數字，那麼 \overline{ABCDE} 代表的五位數共有（ ）種可能。 A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

A	B	C	D	E
—	F	G	H	I
2	0	1	5	8

答案：B

解答：(1) $A=2$ ， $B-F=1$ ， $C=1$ ， $G=9$ ， $H-D=4$ ， $I-E=2$

(2) 還剩3、4、5、6、7、8湊出： $7-3=4$ ， $8-6=2$ ， $5-4=1$ ；

$8-4=4$ ， $5-3=2$ ， $7-6=1$ ；共2種可能25136，27143

7. 已知各位數字均不為零的七位數 $\overline{abcdefg}$ 能被7、11、13分別整除，若要保證交換兩位數字後得到的新七位數仍能被7、11、13分別整除，可以交換（ ）。

A. a 和 d B. a 和 e C. a 和 f D. a 和 g

答案：D

解答：從右起三位截斷，一加一減，得 $1001|(a-\overline{bcd} + \overline{efg}) \Rightarrow a$ 和 g 可交換

8. 斐波那契數列為： $a_1=1$ 、 $a_2=1$ 、 $a_3=2$ 、 $a_4=3$ 、 $a_5=5$ 、 $a_6=8$ 、 $a_7=13$ 、 \dots ，從第三項起每一項為其前兩項之和，那麼 $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2015}$ 與 $a_2+a_4+a_6+\dots+a_{2016}$ 相差（ ）。 A. 0 B. 1 C. 2015 D. 2016

答案：A

解答： $a_2=a_1$ ； $a_4=a_2+a_3$ ； \dots ； $a_{2016}=a_{2014}+a_{2015}$ ；

故 $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2015}=a_2+a_4+a_6+\dots+a_{2016}$

二、填空題（每小題 5 分，共 40 分）

9. 一種液晶螢幕恰好可以顯示4個數字，每個數字均由2~7條線段組成（如圖）。當旋轉觀看時有些顯示沒有意義，有些顯示不變，還有些顯示成另一個數，那麼兩種顯示下都是四位數（首位非0），它們的差最大為_____。（2015旋轉後的1位置有變化，算作無意義）



答案：7839

解答：中心旋轉有意義的，只能含0、2、5、6、8、9；

最大懸殊99□□與20□□；即 $9905-2066=7839$

10. 在 15×15 的表格中，按圖中規律填入自然數，那麼對角線上的15個數之和為_____。

1	2	3	13	14	15
17	16	15	5	4	3
6	7	8	18	19	20
24	23	22	12	11	10
15	16	17	27	28	29
35	34	33	23	22	21
...
119	118	117	107	106	105
120	121	122	132	133	134

答案：785

解答：第 n 行最小數為 $\frac{n \times (n+1)}{2}$

對角線上數之和相當於每行最小數之和再加上

$(0+13)+(2+11)+(4+9)+\dots+(12+1)+14$ ，即

$$\frac{1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + 15 \times 16}{2} + 7 \times 13 + 14 = \frac{15 \times 16 \times 17}{6} + 105 = 785$$

11. Given: $2 \times 2 - 3 = 1$, $3 \times 2 - 4 = 2$, $4 \times 2 - 5 = 3$, \dots , $9 \times 2 - 10 = 8$. What is the simplified value of

$$\frac{1}{2 \times 3} \times 2^2 + \frac{2}{3 \times 4} \times 2^3 + \frac{3}{4 \times 5} \times 2^4 + \dots + \frac{7}{8 \times 9} \times 2^8 + \frac{8}{9 \times 10} \times 2^9 = ? \text{ _____}$$

答案：100.4

翻譯：已知： $2 \times 2 - 3 = 1$ ， $3 \times 2 - 4 = 2$ ， $4 \times 2 - 5 = 3$ ， \dots ， $9 \times 2 - 10 = 8$ ，計算：

$$\frac{1}{2 \times 3} \times 2^2 + \frac{2}{3 \times 4} \times 2^3 + \frac{3}{4 \times 5} \times 2^4 + \dots + \frac{7}{8 \times 9} \times 2^8 + \frac{8}{9 \times 10} \times 2^9 = \text{_____}$$

解答：原式 = $\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{5} - \frac{2^4}{4} + \dots + \frac{2^9}{9} - \frac{2^8}{8} + \frac{2^{10}}{10} - \frac{2^9}{9} = \frac{2^{10}}{10} - \frac{2^2}{2}$
 $= 102.4 - 2 = 100.4$

12. 一個空水池，原本打開A進水管灌水，但過程中排水口C不慎打開，結果8小時後才灌了2/3池水。馬上關閉排水口，再把B進水管也打開，最終又過了2小時將水池灌滿。經測算排水口C只開了1小時，但排出的總水量卻比從B管進入的總水量多1倍，那麼打開排水口排空一整池水需要_____小時。

答案：4.5

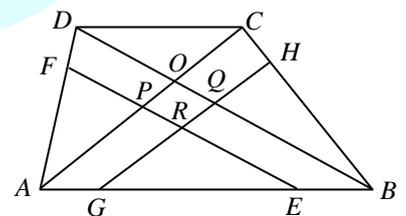
解答：(1) $V_A + V_B = \frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{6}$
 (2) $8V_A - \frac{2}{3} = 2(\frac{1}{3} - 2V_A)$ ， $V_A = \frac{1}{9}$ ， $V_B = \frac{1}{18}$
 (3) $V_C = (\frac{8}{9} - \frac{2}{3}) \div 1 = \frac{2}{9}$ ， $1 \div \frac{2}{9} = 4.5$ 時

13. IMC組委會為某國代表團安排車輛，有大小兩種規格，小車承載量不到大車的一半，已知1輛大車和1輛小車共有60個乘客座位，1輛大車和2輛小車只能乘載團員總數的三分之一。如果組委會共派出7輛車，恰好能承載全部團員，且恰好坐滿，那麼此國代表團共有_____名團員。

答案：225

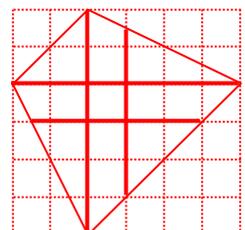
解答：(1) 小車座位 ≤ 19
 (2) 3大6小可以坐滿，故1大6小，2大5小，3大4小都無法坐滿
 (3) 若“4大3小”，則1大=3小，大=45，小=15
 若“5大2小”，則2大=4小，大=40，小=20，不滿足條件
 易知“6大1小”與“7大0小”更不滿足條件
 故共 $4 \times 45 + 3 \times 15 = 225$ 名

14. 如圖，梯形ABCD面積為1， $AB \parallel CD$ ， $EF \parallel BD$ ， $GH \parallel AC$ ，且 $AB = 2CD$ ， $AP = PC$ ， $BQ = QD$ ，如果 $S_1 = S_{\triangle DOC} + S_{\triangle GRE}$ ， $S_2 = S_{\triangle APF} + S_{\triangle BQH}$ ，那麼 S_1 與 S_2 相差_____。

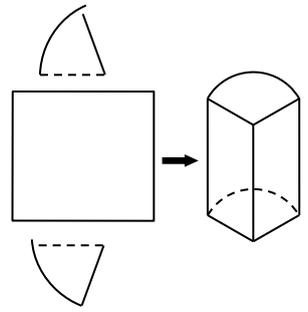


答案：1/36

解答：將梯形ABCD放入6×6的方格表內，共占18格，每格面積1/18； $\triangle DOC$ 與 $\triangle GRE$ 共占4格， $\triangle APF$ 與 $\triangle BQH$ 共占4.5格；相差0.5格，即面積為1/36



15. 如圖，在一張 $16\text{cm}\times 12\text{cm}$ 的長方形紙片的兩對邊各黏上一個相同的扇形，使之可以折成一個底面為扇形的柱體（如圖，黏和面積處不計），適當選取對邊以及扇形的半徑和圓心角度，可得到的柱體體積最大為_____ cm^3 。



答案：192

解答：(1) 以 12cm 為高，設底面半徑為 R

$$\text{則扇形的弧長為}(16-2R), \text{面積為}\frac{1}{2}R(16-2R) = R(8-R) \leq 4^2$$

$$\text{體積的最大值為}4^2 \times 12 = 192$$

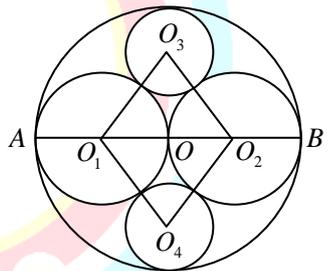
(2) 以 16cm 為高，設底面半徑為 R

$$\text{則扇形的弧長為}(12-2R), \text{面積為}\frac{1}{2}R(12-2R) = R(6-R) \leq 3^2$$

$$\text{體積的最大值為}3^2 \times 16 = 144$$

故最大值為192

16. 如圖，圓 O 的直徑 $AB=10$ 公分，分別以 OA 、 OB 為直徑畫圓 O_1 和 O_2 ，在 O 和 O_1 ， O 和 O_2 的空間分別畫有兩個圓 O_3 和 O_4 ，使這些圓互為彼此正切，求 $O_1O_2O_3O_4$ 所組成的菱形面積為_____平方公分。



答案： $8\frac{1}{3}$

解答：連接 O_3O_4 ，必經過原點 O ，且 $O_3O_4 \perp AB$ ，

$$\text{設圓 } O_3 \text{ 半徑為 } x \text{ 公分，那麼 } O_1O_3 = \frac{5}{2} + x, O_1O = \frac{5}{2}, OO_3 = 5 - x$$

$$\text{在三角形 } \triangle O_3OO_1, \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (5-x)^2 = \left(\frac{5}{2} + x\right)^2, \therefore x = \frac{5}{3}$$

$$\text{菱形 } O_1O_2O_3O_4, O_1O_2 = 5, O_3O_4 = 2\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{10}{3}$$

$$\text{因此 } S_{\text{rhombus}} = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{10}{3} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3} \text{ cm}^2$$

三、簡答題（每小題 10 分，共 20 分，請簡要寫出解答過程）

17. 有A、B、C三面鐘，A慢、C快、B走時準確，現將A和C同時在標準時間0：00整校準，當這兩面鐘的分針再次走到同一位置時，將B調整成兩面鐘的平均時間，此後當A、B的分針第一次走到同一位置時，發現B、C顯示時間為11：30和12：36（1天之內），那麼現在的標準時間是幾時幾分？（分鐘數值保留整數）

答案：11：27

解答：(1) 最後A、B分針位置相同，且A慢，故A顯示10:30

從而可見A、C速度比為 $(10 \times 60 + 30) : (12 \times 60 + 36) = 5 : 6$

因此，第一次A、C分針位置相同時，

A顯示5:00，C顯示6:00，B被調為5:30

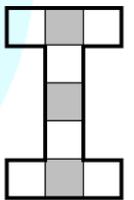
(2) 從B顯示5：30~11：30的6個小時中，

A分針走 $(5 \times 60 + 30) = 330$ 格，速度為55格/時，每小時慢5分

C分針走 $(6 \times 60 + 36) = 396$ 格；速度為66格/時，每小時快6分

(3) 現在C表分針共走了 $12 \times 60 + 36 = 756$ 格， $756 \div 66 = 11 \frac{5}{11}$ 時，即 $11:27 \frac{3}{11}$

18. 將數字1~9分別填入右圖的“T”字形的每一格，每格恰好填入一個數字，如果要求灰色的空格內所填數字要比與之相鄰的空白格中數字大，且至少大2，那麼共有多少種不同的填數方法？（圖形不可翻轉或旋轉）



答案：3048

解答：(1) 灰格中的數字最大必為9，其次為8，最小的數字不小於4；

(2) 9、8、7 \Rightarrow 9在中心 $2 \times 3 \times A_5^5$ ，8在中心 $2 \times 3 \times A_5^5$ ，7在中心 $2 \times 4 \times A_5^5$ ，共2400種

(3) 9、8、6 \Rightarrow 9在中心0，8在中心 $2 \times 2 \times 2 \times A_4^4$ ，6在中心 $2 \times 2 \times 3 \times A_4^4$ ，共480種

(4) 9、8、5 \Rightarrow 9在中心0，8在中心 $2 \times 2 \times 2 \times A_3^3$ ，5在中心 $2 \times 2 \times 3 \times A_3^3$ ，共120種

(5) 9、8、4 \Rightarrow 9在中心0，8在中心0，4在中心 $2 \times 2 \times 2 \times A_3^3$ ，共48種
共 $2400 + 480 + 120 + 48 = 3048$ 種