

2016 國際數學競賽 台灣區初賽

2016 International Mathematics Contest (Taiwan)

國中三年級組 試卷

※ 請將答案寫在答案卷上

一、選擇題 (每題 10 分)

- (A) 1. Calculate the exact value of $(379+379)\times 500$?
 (A) 379000 (B) 397000 (C) 558000 (D) 548000

解析： $379 \times 2 \times 500 = 379 \times 1000 = 379000$

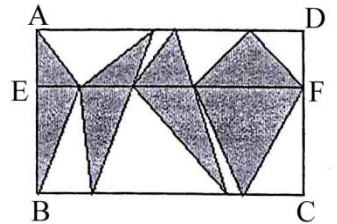
- (C) 2. If $a^2+a=0$, then the result of $a^{2015}+a^{2016}+2017$ is _____.
 (A) 6048 (B) 0 (C) 2017 (D) 2018

解析： $a(a+1)=0 \rightarrow a=0$ 或 -1

① $a=0 \rightarrow$ 原式 $= 0+0+2017=2017$

② $a=-1 \rightarrow$ 原式 $= (-1)^{2015} + (-1)^{2016} + 2017 = -1+1+2017=2017$

- (A) 3. In the figure given. $ABCD$ and $AEFD$ are all the rectangles, the area of the rectangle $ABCD$ is 1cm^2 . Then the area of the shaded part is _____ cm^2 .
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$



解析：斜線面積 $= ABCD$ 的 $\frac{1}{2}$

- (C) 4. 仔細觀察下列數字運算的規律：

$$3^2 - 1 = 4 \times 2$$

$$4^2 - 1 = 5 \times 3$$

$$5^2 - 1 = 6 \times 4$$

⋮

$$98^2 - 1 = 99 \times 97$$

若 $978 \times 976 + 24 \times 22 + 2 \times 977 \times 23 + 2 = a^2$ ，其中 a 為正整數，則 $a = ?$

- (A) 977 (B) 977^2 (C) 1000 (D) 1000^2

解析： $978 \times 976 + 24 \times 22 + 2 \times 977 \times 23 + 2$

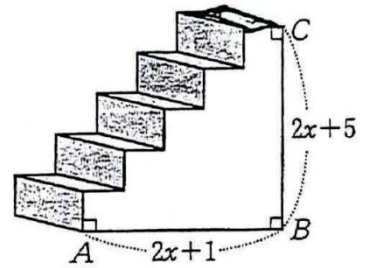
$$= 977^2 - 1 + 23^2 - 1 + 2 \times 977 \times 23 + 2$$

$$= 977^2 + 2 \times 977 \times 23 + 23^2 \text{ (和的平方公式)}$$

$$= (977 + 23)^2 = 1000^2 = a^2 \quad \therefore a = 1000, \text{ 故選(C)}$$

- (D) 5. 右圖是一階梯的側面，每個轉角均為直角，已知高 $\overline{BC} = 2x + 5$ ，底寬 $\overline{AB} = 2x + 1$ ，則此側面的周長為多少？

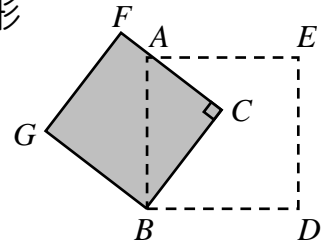
(A) $8x + 6$ (B) $6x + 8$ (C) $8x + 10$ (D) $8x + 12$



解析：側面周長 = $2 \times [(2x+5) + (2x+1)] = 8x + 12$

- (D) 6. 如右圖，在三角形 ABC 中， $\angle ACB$ 是直角，且正方形 $ABDE$ 的面積是 225，正方形 $BCFG$ 的面積是 144，則三角形 ABC 之周長為何？

(A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 36



解析： $\overline{BC} = 12$ $\overline{AB} = 15$

$$\because \angle ACB = 90^\circ \quad \therefore \overline{AC} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 周長} = 12 + 9 + 15 = 36 \quad \therefore \text{選(D)}$$

- (A) 7. 年幼的弟弟塗鴉時不小心把大寶數學作業簿上的三個數字塗汙了，如圖以 P 、 a 、 b 表示，已知大寶是在做因式分解的計算，且 a 、 b 皆為整數，試問 P 值不可能下列哪一個數字？

$1. x^2 - 3x + P = (x+a)(x+b)$ $2. \dots\dots\dots$ $3. \dots\dots\dots$
--

(A) 4 (B) -40 (C) -10 (D) 2

解析：① $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab = x^2 - 3x + P \rightarrow a+b = -3, ab = P$

② $-40 = (-8) \times 5, -10 = (-5) \times 2, 2 = (-2) \times (-1) \Rightarrow a+b = -3$

P 可能是 -40, -10, 2

③ $P \neq 4$

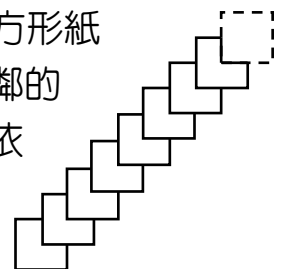
- (C) 8. 忠孝國中 共有 1120 人，各年級各班人數均相同，而全校班級數剛好比各班人數少 12，今配合教育局小班制的制度各班人數減少 5 人後，全校應設立多少班才能容納原有人數？ (A) 28 (B) 30 (C) 32 (D) 40

解析：設全校 x 班，每班 $(x+12)$ 人， $x(x+12) = 1120, x^2 + 12x - 1120 = 0$

$$(x-28)(x+40) = 0, x = 28 \text{ 或 } -40 \text{ (不合)}, 28 + 12 = 40 \text{ 人}$$

$$1120 \div (40 - 5) = 32$$

- (D) 9. 如右圖，每一張正方形紙片的邊長為 4 公分，若每個正方形紙片的一個頂點，恰在另一個正方形紙片的中心處，且相鄰的二個正方形其邊與邊互相平行，現將若干張正方形紙片依上述規則疊在一起，已知疊出來的面積共 196 平方公分，請問總共使用了多少張正方形紙片呢？



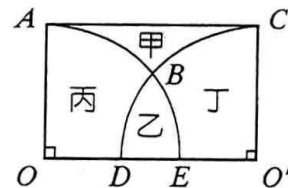
(A) 8 張 (B) 12 張 (C) 14 張 (D) 16 張

解析：原正方形面積： $4 \times 4 = 16$ ，每增加一張則多了 $16 \times \frac{3}{4} = 12$

$$\therefore 16 + 12 \times (n - 1) = 196, n = (196 - 16) \div 12 + 1 = 16$$

(B) 10. 如右圖，四邊形 $AOO'C$ 為一矩形，如圖 \widehat{ABE} 、 \widehat{CBD} 分別為以 O 與 O' 為圓心，半徑為 10 的弧。已知甲部分面積等於乙部分面積，求 $\overline{OO'}$ = ?

- (A) 5 (B) 5π (C) 4 (D) 4π



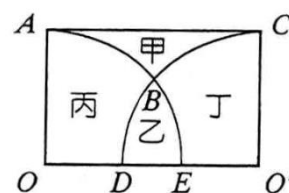
解析： \because 甲 = 乙

$$\therefore \text{矩形面積} = \text{甲} + \text{丁} + \text{丙} + \text{乙} = \text{乙} + \text{丁} + \text{丙} + \text{乙} = (\text{乙} + \text{丁}) + (\text{丙} + \text{乙})$$

$$= \frac{1}{4} \text{圓} + \frac{1}{4} \text{圓} = \frac{1}{2} \text{圓} = 10 \times 10 \times \pi \times \frac{1}{2} = 50\pi$$

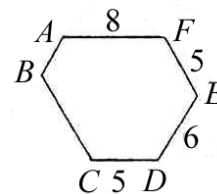
$$\text{矩形面積} = \overline{CO'} \times \overline{OO'} = 50\pi$$

$$10 \times \overline{OO'} = 50\pi \quad \therefore \overline{OO'} = 5\pi$$



(B) 11. 如右圖， $ABCDEF$ 為等角六邊形，若 $\overline{AF} = 8$ ， $\overline{FE} = 5$ ， $\overline{ED} = 6$ ， $\overline{CD} = 5$ ，試求 $\overline{AB} = ?$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

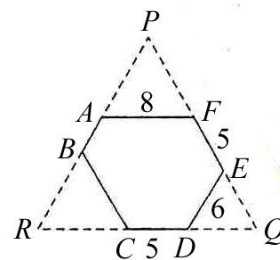


解析：延長 \overline{BA} 與 \overline{EF} 設相交於 P ，延長 \overline{EF} 與 \overline{CD} 設相交於 Q ，延長 \overline{AB} 與 \overline{CD} 設相交於 R

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$$

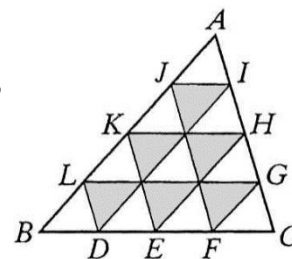
$$\therefore \triangle PQR \text{ 為正三角形, } \overline{PQ} = 8 + 5 + 6 = 19 = \overline{RQ}$$

$$\therefore \overline{RC} = 19 - 5 - 6 = 8 = \overline{BR}, \text{ 又 } \overline{PR} = 19 = 8 + \overline{AB} + 8 \Rightarrow \overline{AB} = 3, \text{ 故選(B)}$$



(B) 12. 如圖， $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FC}$ ， $\overline{LD} \parallel \overline{KE} \parallel \overline{JF} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{GF} \parallel \overline{HE} \parallel \overline{ID} \parallel \overline{AB}$ 。已知 $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{AC} = 7$ ，若灰色部分之所有三角形周長的總和為 k ，則下列何者正確？

- (A) $32 < k < 35$ (B) $35 < k < 38$
(C) $38 < k < 41$ (D) $41 < k < 44$

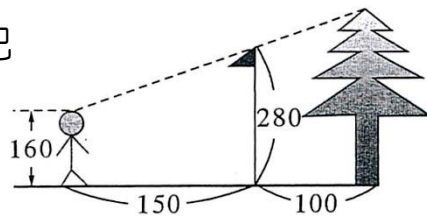


解析：所求 = $6\overline{JI} + 6\overline{LD} + 6\overline{GF}$

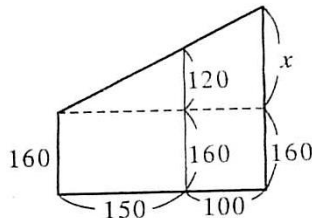
$$= 6 \times \frac{\overline{BC}}{4} + 6 \times \frac{\overline{AC}}{4} + 6 \times \frac{\overline{AB}}{4}$$

$$= \frac{3}{2} (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) = \frac{3}{2} \times 24 = 36$$

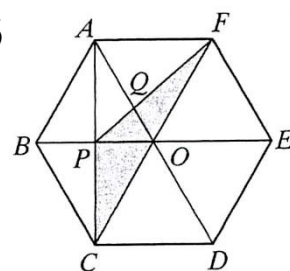
- (A) 13. 如右圖，小玫站在旗桿前測量樹的高度，若已知小玫身高 160 公分，旗桿高 280 公分，且旗桿在樹左邊 100 公分，小玫在旗桿左邊 150 公分，三個頂點均在同一直線上，則樹高多少公分？ (A) 360 (B) 380 (C) 400 (D) 460



解析：如右圖， $\frac{120}{x} = \frac{150}{150+100}$ ，
 $\frac{120}{x} = \frac{3}{5}$ ， $600 = 3x$ ， $x = 200$
 \therefore 樹高 = $200 + 160 = 360$ 公分

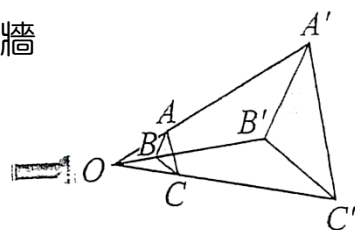


- (A) 14. 右圖是由六個邊長為 1 的正三角形所構成， \overline{AC} 交 \overline{BO} 於 P 點， \overline{PF} 交 \overline{AO} 於 Q 點，則 $\overline{OP} + \overline{OQ} = ?$
 (A) $\frac{5}{6}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$



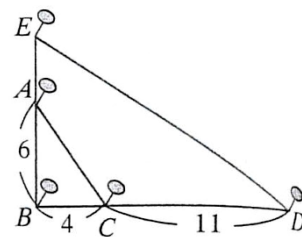
解析： $\overline{OP} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ ， $\triangle OPQ \sim \triangle AFQ$
 $\therefore \overline{OQ} : \overline{AQ} = \overline{OP} : \overline{AF} = 1 : 2$
 $\therefore \overline{OQ} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$
 $\therefore \overline{OP} + \overline{OQ} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

- (D) 15. 小萍將 $\triangle ABC$ 的板子放在光源 O 的前方，結果在牆上投射出 $\triangle A'B'C'$ 的圖形，已知 $\overline{AO} : \overline{AA'} = 3 : 8$ ，且 $\triangle ABC$ 的面積為 36，則 $\triangle A'B'C'$ 的面積為何？
 (A) 96 (B) 132 (C) 256 (D) 484



解析： $\because \overline{AO} : \overline{AA'} = 3 : 8 \quad \therefore \overline{AO} : \overline{A'O} = \overline{AC} : \overline{A'C'} = 3 : 11$
 $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = 9 : 121 \rightarrow 36 : \triangle A'B'C' = 9 : 121 \quad \therefore \triangle A'B'C' = 484$

- (C) 16. 如右圖，將一條橡皮筋分別訂在 A 、 B 、 C 三點，量得 $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{BC} = 4$ ，之後將橡皮筋從 A 點拉到 E 點， C 點拉到 D 點， B 點固定不動，已知 $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ ，且 $\overline{CD} = 11$ ，請問由 A 點拉到 E 點，移動距離 \overline{AE} 是多少？ (A) 3 (B) $3\frac{1}{2}$ (C) 4 (D) 5



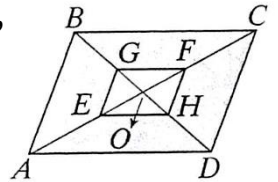
解析：∵ $\triangle ABC \sim \triangle DBE$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}, \quad \frac{6}{4+11} = \frac{4}{\overline{BE}}$$

$$6\overline{BE} = 60, \quad \overline{BE} = 10$$

$$\therefore \overline{AE} = 10 - 6 = 4$$

- (C) 17. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， E 、 F 三等分對角線 \overline{AC} ， G 、 H 三等分對角線 \overline{BD} 。設 $\square ABCD$ 的面積為 108，則 $\square EGFH$ 的面積為多少？



- (A) 8 (B) 9 (C) 12 (D) 16

解析： $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{CF}$

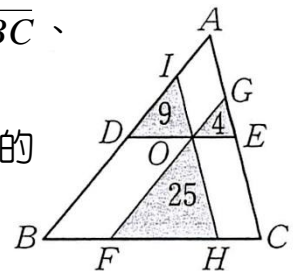
$$\overline{OE} : \overline{AE} = \frac{1}{2} : 1 = 1 : 2 \Rightarrow \overline{OE} : \overline{OA} = 1 : 3$$

∴ $\square EGFH \sim \square ABCD$

$$\therefore \square EGFH : \square ABCD = 1^2 : 3^2 = 1 : 9$$

$$\therefore \square EGFH \text{ 面積} = 108 \times \frac{1}{9} = 12$$

- (D) 18. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， \overline{DE} 、 \overline{FG} 、 \overline{HI} 三線段分別平行 \overline{BC} 、 \overline{AB} 與 \overline{AC} ，且三線段交於 O 點。若 $\triangle OEG$ 、 $\triangle ODI$ 、 $\triangle OFH$ 的面積依序為 4、9、25 平方單位，則 $\triangle ABC$ 的面積為多少平方單位？



- (A) 76 (B) 90 (C) 96 (D) 100

解析： $\triangle OEG \sim \triangle ODI \sim \triangle FHO$

$$\rightarrow \triangle OEG \text{ 面積} : \triangle ODI \text{ 面積} : \triangle FHO \text{ 面積} = 4 : 9 : 25$$

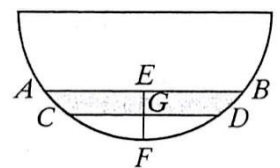
$$\therefore \overline{OG} : \overline{ID} : \overline{OF} = 2 : 3 : 5, \text{ 即 } \overline{AI} : \overline{ID} : \overline{DB} = 2 : 3 : 5$$

$$\therefore \overline{AB} : \overline{ID} = (2+3+5) : 3 = 10 : 3$$

$$\triangle ABC \text{ 面積} : \triangle ODI \text{ 面積} = 10^2 : 3^2 = 100 : 9$$

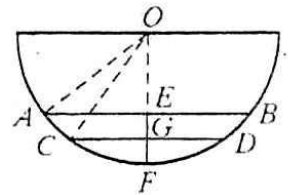
$$\text{又 } \triangle ODI \text{ 面積} = 9 \quad \therefore \triangle ABC \text{ 面積} = 100$$

- (B) 19. 如右圖，飛鴻用一個剖面圖為半圓形的碗喝酒，原本碗中酒的高度 $\overline{EF} = 2$ 公分，寬度 $\overline{AB} = 8$ 公分，後來飛鴻喝了一口，使酒面高度下降 1 公分，則此時酒面寬度 \overline{CD} 是多少公分？



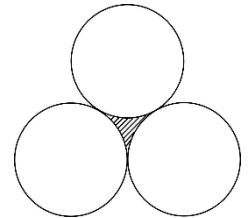
- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

解析：設圓心為 O 、半徑為 r ，由勾股定理可知 $\overline{OE}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{OA}^2$
 $\rightarrow (r-2)^2 + 4^2 = r^2$
 $\rightarrow r=5, \overline{CG} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{OG}^2} = \sqrt{5^2 - (5-1)^2} = 3$
 $\rightarrow \overline{CD} = 2 \times 3 = 6$



(D) 20. 如右圖，將 3 枚直徑 4 公分的圓形代幣，以任意兩圓外切的方式排列，則三枚硬幣所夾的空隙（斜線部分）的面積為多少平方公分？

- (A) $8\sqrt{3} - \frac{9}{2}\pi$ (B) $8\sqrt{3} - 3\pi$
 (C) $4\sqrt{3} - \frac{5}{2}\pi$ (D) $4\sqrt{3} - 2\pi$

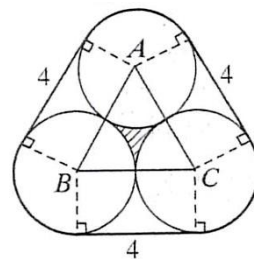


解析：連 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} ，

則斜線面積 = 正三角形面積 - $\frac{1}{2}$ 圓面積

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \pi$$

$$= 4\sqrt{3} - 2\pi$$



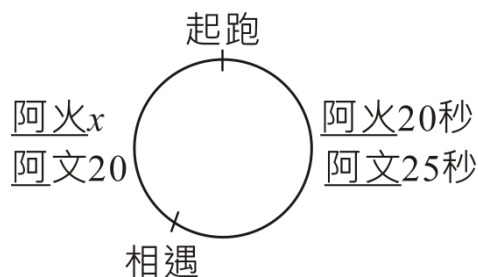
(B) 21. 你參加賽跑，追過第 2 名，你是第幾名？

- (A) 第 1 名 (B) 第 2 名 (C) 第 3 名 (D) 第 4 名

解析：追過第 2 名，取代他的名次，所以你是第 2 名

(C) 22. 有一個環形跑道，阿文、阿火從休息亭起跑，阿文跑一圈需要 45 秒，阿火反方向跑，每 20 秒會和阿文相遇一次，請問阿火跑一圈需要幾秒？ (A) 25 (B) 30 (C) 36 (D) 40

解析：



$$45 - 20 = 25$$

$$x : 20 = 20 : 25, x = 16$$

$$\therefore 20 + 16 = 36$$

(B) 23. 某校由 200 位學生投票選拔三位模範生（一人一票，有可能無效票），已知有 6 位候選人，選舉結果每人票數都不同，且每人至少有一票。結果周吉倫當選且票數是第 3 高，那麼他最多可能有幾票？

- (A) 62 (B) 63 (C) 64 (D) 65

解析：令周吉倫得 x 票

對周最有利

$$\rightarrow x+2+x+1+x+3+2+1 \leq 200$$

$$\rightarrow x \leq 63\frac{2}{3}, x \text{ 最大} = 63$$

名次	1	2	3	4	5	6
票	$x+2$	$x+1$	x	3	2	1

$$\text{算術：}(200-3-2-1-1-2) \div 3 = 63\frac{2}{3} \therefore \text{最多 } 63 \text{ 票}$$

(A) 24. 在一慈善捐款活動中有 a_1 個人至少捐 1 萬元，有 a_2 個人至少捐 2 萬元，有 a_3 個人至少捐 3 萬元……，有 a_n 個人至少捐 n 萬元，沒人捐超過 n 萬元，總共收到捐款多少萬元？

(A) $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ (B) $a_1+2a_2+3a_3+\dots+na_n$

(C) $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$ (D) $(1+2+3+\dots+n) \times a_n$

解析： $1 \times (a_1 - a_2) + 2 \times (a_2 - a_3) + 3 \times (a_3 - a_4) + 4 \times (a_4 - a_5) + \dots + n \times (a_{n-1} - a_n)$

$$= a_1 - a_2 + 2a_2 - 2a_3 + 3a_3 - 3a_4 + 4a_4 - 4a_5 + \dots + na_{n-1} - na_n$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

(B) 25. A、B、C、D 四人作○×是非題，他們的答案如下表所示。

A 與 B 得 70 分，C 得 60 分，求 D 之得分。(答對一題得 10 分)

	第 1 問	第 2 問	第 3 問	第 4 問	第 5 問	第 6 問	第 7 問	第 8 問	第 9 問	第 10 問	分數
A	○	×	○	×	○	○	×	×	×	○	70
B	○	○	×	×	×	○	○	○	×	×	70
C	×	×	×	○	○	×	○	×	○	×	60
D	○	×	×	○	○	×	×	○	×	×	?

(A) 50

(B) 60 分

(C) 70 分

(D) 80 分

解析：A 與 B 每人答對 7 題，2 人合計答對 14 題。但兩人的答案只有 4 題相同，其餘的 6 題不同。後者（答案不同）的 6 題中必然有 6 個正解，因此前者（答案相同）的 4 題中有 8 個正解，即全部為正解。

這四題及其正解為第 1 題 (○)，第 4 題 (×)，第 6 題 (○)，第 9 題 (×)。

在 C 的答案中上述四題皆答錯了，由其得分為 60 可知其他六題他全答對了。

根據上述資料，D 答對的是第 1、2、3、5、9、10 題，故得分為 60。

	第 1 問	第 2 問	第 3 問	第 4 問	第 5 問	第 6 問	第 7 問	第 8 問	第 9 問	第 10 問	分數
A	○	×	○	×	○	○	×	×	×	○	70
B	○	○	×	×	×	○	○	○	×	×	70
C	×	×	×	○	○	×	○	×	○	×	60
D	○	×	×	○	○	×	×	○	×	×	?
正解	○	×	×	×	○	○	○	×	×	×	

→ 60 分

二、計算題（每題 25 分）

1. 找規則律。

【例】：

1		4	2		5	4		7
	2			19			?	
2		3	3		4	5		6

【解】： $1 \times 2 \times 3 - 4 = 2$ ， $2 \times 3 \times 4 - 5 = 19$ ， $4 \times 5 \times 6 - 7 = 113 \dots \dots$ 答

(1) 找出下列 ? 是多少。

(提供 1 種解法得 10 分，提供 2 種不同解法得 15 分)

7		2	5		10	9		2
	6			20			?	
2		4	8		2	4		10

(2) 仿上自己創造題目並解答。

(至少 2 種 +、-、×、÷ 運算且答案是正整數，10 分)

解析：(1) 參考解答 $7 \times 2 - 4 \times 2 = 6$ ， $5 \times 8 - 2 \times 10 = 20$ ， $9 \times 4 - 10 \times 2 = 16$

另解 1. $(7-1) \times 2 - 2 - 4 = 6$

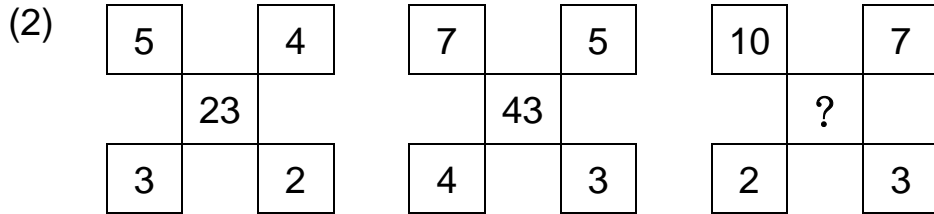
另解 2. $7+2-4+2-1=6$

$(5-1) \times 8 - 10 - 2 = 20$

$5+10-2+8-1=20$

$(9-1) \times 4 - 2 - 10 = 20$

$9+2-10+4-1=4$

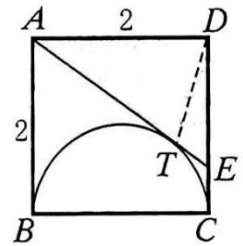


$5 \times 3 + 4 \times 2 = 23$ ， $7 \times 4 + 5 \times 3 = 43$ ， $10 \times 2 + 7 \times 3 = 41$

2. 如右圖，正方形 $ABCD$ 的邊長為 2，以 \overline{BC} 為直徑作一半圓， \overline{AE} 切圓於 T ，求：

(1) \overline{CE} 之長。

(2) $\triangle ADT$ 的面積。



解析：(1) 設 $\overline{CE} = x$ $\therefore \overline{ET} = \overline{CE} = x$ ， $\overline{DE} = 2 - x$ ， $\overline{AT} = \overline{AB} = 2$

$\therefore \overline{AE} = 2 + x$

在 $\triangle ADE$ 中 $\because \angle ADE = 90^\circ$

$\therefore 2^2 + (2-x)^2 = (2+x)^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \therefore \overline{CE} = \frac{1}{2}$

(2) 作 $\overline{DH} \perp \overline{AE}$ $\therefore \overline{DH} = \frac{\overline{AD} \times \overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{2 \times \frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{6}{5}$

$\therefore \triangle ADT$ 面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{AT} \times \overline{DH} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$

答：(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{6}{5}$

